



โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง

การแข่งขันในการผลิตกระแสไฟฟ้า

ระหว่างก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน

ของประเทศไทย โดยประยุกต์ใช้แบบจำลอง

ลอตกา-โวลเทอร์รา

Competition in Thailand's Electricity Generation among
Natural Gas, Coal, and Renewable Energy: An Application of
the Lotka-Volterra Model

นำเสนอโดย

นางสาวนริศรา พิไลพันธ์ รหัสนักศึกษา 6604105308

นางสาวอัจฉริยา อินทิสาร รหัสนักศึกษา 6604105320

นางสาวอัมพร แซ่ลี รหัสนักศึกษา 6604105322

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา 10305492 โครงการ

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยแม่โจ้

โครงการคณิตศาสตร์
เรื่อง
การแข่งขันในการผลิตกระแสไฟฟ้า
ระหว่างก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน
ของประเทศไทย โดยประยุกต์ใช้แบบจำลอง
ลอตกา-โวลเทอร์รา

Competition in Thailand's Electricity Generation among
Natural Gas, Coal, and Renewable Energy: An Application of
the Lotka-Volterra Model

นำเสนอโดย
นางสาวนริศรา พิไลพันธ์ รหัสนักศึกษา 6604105308
นางสาวอัจฉริยา อินทะสาร รหัสนักศึกษา 6604105320
นางสาวอัมพร แซ่ลี รหัสนักศึกษา 6604105322



..... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลิตา ชากฤษณ์)



..... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เยาวลักษณ์ คงธรรม)

ชื่อ-สกุล	นางสาวนริศรา พิไลพันธ์	รหัสนักศึกษา 6604105308
	นางสาวอัจฉริยา อินตะสาร	รหัสนักศึกษา 6604105320
	นางสาวอัมพร แซ่ลี	รหัสนักศึกษา 6604105322
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลิตา ชากฤษณ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์เยาวลักษณ์ คงธรรม	
หัวข้อโครงการ	การแข่งขันในการผลิตกระแสไฟฟ้า ระหว่างก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน ของประเทศไทย โดยประยุกต์ใช้แบบจำลอง ลอตกา-โวลเทอร์รา	

บทคัดย่อ

โครงการฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพลวัตและการแย่งชิงสัดส่วนการผลิตระหว่างแหล่งพลังงานไฟฟ้าหลักในประเทศไทย ได้แก่ ก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน โดยอาศัยข้อมูลปริมาณการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากแหล่งต่าง ๆ ในช่วงปี ค.ศ. 2018–2025 คณะผู้จัดทำได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์ราแบบ 3 ตัวแปร (3-Species Lotka–Volterra Model) เพื่อวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์การแข่งขันและการทดแทนกันของแหล่งพลังงานดังกล่าว ในขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างวิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral Method) และวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Log-Integral Method) ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method) พร้อมทั้งประเมินความแม่นยำของการกระชับข้อมูลด้วยตัวชี้วัด RMSE MAE และ MAPE ผลการศึกษาพบว่าวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึมให้ความแม่นยำที่สูงกว่า ท้ายที่สุด จึงนำพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่สุดไปจำลองพฤติกรรมของระบบเพื่อคาดการณ์แนวโน้มการเปลี่ยนผ่านและโครงสร้างของแหล่งผลิตพลังงานไฟฟ้าในอนาคต

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง การแข่งขันในการผลิตกระแสไฟฟ้าระหว่างก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทนของประเทศไทย โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์รา ได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิตา ชากฤษณ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์เยาวลักษณ์ คงธรรม ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ เสนอแนะแนวทาง ตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของโครงการมาโดยตลอด จนทำให้โครงการฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

คณะผู้จัดทำโครงการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง การวิเคราะห์การแข่งขันของการผลิตพลังงานไฟฟ้าด้วยก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์รา ที่ได้จัดทำขึ้น จะเป็นประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจ และสามารถนำไปศึกษาเพิ่มเติม หรือต่อยอดในด้านที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้เกิดประโยชน์ทางวิชาการอย่างมีประสิทธิภาพต่อไป

คณะผู้จัดทำ

1 บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การผลิตพลังงานไฟฟ้าเป็นปัจจัยพื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาเศรษฐกิจและคุณภาพชีวิตของประชาชน โดยในปัจจุบันแหล่งพลังงานหลักที่ใช้ในการผลิตไฟฟ้า ได้แก่ ก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน ซึ่งแต่ละแหล่งพลังงานมีบทบาทและข้อจำกัดที่แตกต่างกันทั้งในด้านต้นทุน ประสิทธิภาพ ความมั่นคงทางพลังงาน และผลกระทบต่อสิ่งแวดล้อม ส่งผลให้เกิดการแข่งขันระหว่างแหล่งพลังงานเหล่านี้ในการครองสัดส่วนการผลิตไฟฟ้าในระบบพลังงาน

สัดส่วนการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามนโยบายพลังงาน เทคโนโลยีการผลิตที่พัฒนา ตลอดจนความตระหนักด้านสิ่งแวดล้อม การแข่งขันดังกล่าวสามารถนำมาวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ด้วยแบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์รา เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงการแข่งขันระหว่างแหล่งพลังงานต่าง ๆ ได้

โดยทั่วไป การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีเป้าหมายเพื่อหาแบบจำลองที่ไม่ซับซ้อนเกินไป แต่ยังสามารถอธิบายข้อมูลที่มีอยู่ได้ภายในระดับความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ พร้อมทั้งสะท้อนลักษณะสำคัญของระบบที่กำลังศึกษา งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีความเรียบง่ายแต่มีประสิทธิภาพจำนวน 2 วิธี เพื่อนำมาใช้กับแบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์ราแบบคลาสสิก ซึ่งพารามิเตอร์ในแบบจำลองดังกล่าวสะท้อนปัจจัยสำคัญ เช่น อัตราการเติบโต การแข่งขัน และความสัมพันธ์ระหว่างแหล่งพลังงานที่มีปฏิสัมพันธ์กัน การกำหนดค่าพารามิเตอร์เหล่านี้เหมาะสมมีความจำเป็นอย่างยิ่ง เพื่อให้แบบจำลองสามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบการผลิตพลังงานไฟฟ้าได้อย่างถูกต้องและใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด

ในปัจจุบัน ความต้องการใช้พลังงานไฟฟ้ามีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นอย่างต่อเนื่อง ควบคู่กับความจำเป็นในการลดผลกระทบต่อสิ่งแวดล้อม การทำความเข้าใจการแข่งขันและความสัมพันธ์ระหว่างแหล่งพลังงานจึงมีความสำคัญ ไม่เพียงช่วยสนับสนุนการวางแผนและบริหารจัดการระบบพลังงานเท่านั้น แต่ยังสามารถใช้เป็นแนวทางในการกำหนดนโยบายด้านพลังงานและการส่งเสริมการใช้พลังงานทดแทนในอนาคต โดยการวิเคราะห์ในโครงการนี้ครอบคลุมข้อมูลในช่วงเดือนตุลาคม ค.ศ. 2018 ถึงสิงหาคม ค.ศ. 2025 และใช้แบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์ราตั้งระบบสมการ (1.1) - (1.3) วิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1x^2 + c_1xy + d_1xz \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y + b_2y^2 + c_2yx + d_2yz \quad (1.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = a_3z + b_3z^2 + c_3zx + d_3zy \quad (1.3)$$

โดยที่

$x(t)$ คือ ปริมาณการผลิตไฟฟ้าจาก "ก๊าซธรรมชาติ" (Natural Gas) (GWh)

$y(t)$ คือ ปริมาณการผลิตไฟฟ้าจาก "ถ่านหินและลิกไนต์" (Coal & Lignite) (GWh)

$z(t)$ คือ ปริมาณการผลิตไฟฟ้าจาก "พลังงานทดแทนและอื่นๆ" (Hydro, Renewable Energy, Imported) (GWh)

t คือ เวลา (เดือน)

a_1, a_2 และ a_3 คือ พารามิเตอร์อัตราการเติบโตพื้นฐานของการผลิตไฟฟ้าจากแหล่งเชื้อเพลิง x, y และ z

b_1, b_2 และ b_3 คือ พารามิเตอร์ที่แสดงถึงข้อจำกัดหรือปัจจัยภายในที่ส่งผลต่อการเติบโตของแต่ละแหล่งเชื้อเพลิง

c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 และ d_3 คือ พารามิเตอร์ที่แสดงถึงผลกระทบที่มีต่อกันของแหล่งเชื้อเพลิงที่เกี่ยวข้อง

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาพฤติกรรมการแข่งขันระหว่างการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน จากข้อมูลสัดส่วนการผลิตไฟฟ้า
2. เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์ราให้สอดคล้องกับข้อมูลจริง
3. เพื่อวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงการแข่งขันระหว่างแหล่งพลังงาน เช่น การทดแทนหรือการลดบทบาทซึ่งกันและกัน
4. เพื่อจำลองแนวโน้มสัดส่วนการผลิตพลังงานไฟฟ้า โดยใช้แบบจำลองที่สร้างขึ้น
5. เพื่อประเมินความแม่นยำของแบบจำลองด้วยตัวชี้วัด เช่น MAPE, MAE และ RMSE

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความเข้าใจเกี่ยวกับพลวัตการแข่งขันของแหล่งพลังงานในการผลิตไฟฟ้า
2. สามารถใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายระบบพลังงานเชิงปริมาณได้

3. สามารถนำผลการวิเคราะห์ไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนและบริหารจัดการระบบพลังงาน
4. เป็นต้นแบบสำหรับการประยุกต์ใช้แบบจำลองลดทอน-โวลเทจรักรับระบบเศรษฐกิจหรืออุตสาหกรรมอื่น ๆ

1.4 ขอบเขตในการศึกษา

1. ใช้ข้อมูลสัดส่วนการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน
2. ใช้ข้อมูลรายเดือนในช่วงเดือนตุลาคม ค.ศ. 2018 ถึง เดือนพฤศจิกายน 2025 (หรือช่วงเวลาที่สามารถจัดหาข้อมูลได้)
3. ใช้แบบจำลองลดทอน-โวลเทจรักรูปแบบ 3 ตัวแปร
4. คำนวณค่าพารามิเตอร์โดยระเบียบวิธีเชิงอินทิกรัล และวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึมร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด
5. ใช้วิธีรุ่งเง-คุตตาอันดับที่ 4 (RK4) ในการหาผลเฉลยของสมการ
6. ประเมินความแม่นยำของแบบจำลองด้วย MAE, MAPE และ RMSE

1.5 สมมติฐานการศึกษา

1. แบบจำลองลดทอน-โวลเทจรักรูปแบบสามารถอธิบายพฤติกรรมการแข่งขันในการแย่งชิงสัดส่วนของแหล่งพลังงานในการผลิตไฟฟ้าได้
2. การเปลี่ยนแปลงสัดส่วนการผลิตไฟฟ้าจากแหล่งพลังงานหนึ่งได้รับผลกระทบจากการแข่งขันระหว่างแหล่งพลังงานทั้งสาม
3. ผลเฉลยที่ได้จากแบบจำลองสามารถใช้จำลองพฤติกรรมและอธิบายแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงได้

1.6 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. เครื่องคอมพิวเตอร์หรือโน้ตบุ๊ก
2. โปรแกรม Google Colab / Python หรือ MATLAB
3. โปรแกรม Excel หรือ Google Sheets สำหรับจัดการข้อมูล
4. แบบจำลองคณิตศาสตร์ลดทอน-โวลเทจรักรูปแบบ
5. เครื่องมือวิเคราะห์ข้อมูล เช่น pandas, numpy
6. แหล่งข้อมูลหลัก: รายงานด้านพลังงานและไฟฟ้า, หน่วยงานด้านพลังงาน, และฐานข้อมูลสถิติพลังงานที่เกี่ยวข้อง

2 ความรู้พื้นฐาน

2.1 แบบจำลอง Lotka–Volterra [1]

แบบจำลองลอตกา–โวลเทอร์รา (Lotka–Volterra model) ที่เป็นที่รู้จักกันดีสามารถเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \left(a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

แบบจำลองนี้มักถูกนำมาใช้เพื่ออธิบายพลวัตของสิ่งมีชีวิตจำนวน n ชนิด ที่มีปฏิสัมพันธ์กันภายในชุมชน โดยที่ $\frac{dX_i}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดประชากรของสิ่งมีชีวิตชนิดที่ i พารามิเตอร์ a_{i0} ใช้เพื่ออธิบายการเจริญเติบโตตามธรรมชาติของประชากร ซึ่งในกรณีที่ $a_{i0} > 0$ หมายถึงการเพิ่มขึ้นของประชากร และในกรณีที่ $a_{i0} < 0$ หมายถึงการลดลงของประชากร เมื่อไม่มีอิทธิพลจากสิ่งมีชีวิตชนิดอื่น

ความสัมพันธ์ผู้ล่า-เหยื่อ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1x^2 + c_1xy + d_1xz \\ \frac{dy}{dt} = a_2y + b_2y^2 + c_2yx + d_2yz \\ \frac{dz}{dt} = a_3z + b_3z^2 + c_3zx + d_3zy \end{cases} \quad (2.2)$$

พิจารณาระบบสมการ Lotka–Volterra 3 มิติดังสมการ (1.1)-(1.3)

ตารางที่ 1: ความสัมพันธ์ทางการแข่งขันระหว่างธุรกิจตามค่าพารามิเตอร์ (c_i, d_i) เมื่อ $i, j = 1, 2, 3$

c_i, d_i	c_j, d_j	รูปแบบความสัมพันธ์
—	—	แข่งขันกัน (Pure Competition)
+	—	ผู้ล่า-เหยื่อ (Predator–Prey)
+	+	พึ่งพากัน (Mutualism)
+	0	เกื้อกูลหรืออิงอาศัย (Commensalism)
—	0	กีดกัน (Amensalism)
0	0	เป็นกลางหรืออิสระต่อกัน (Neutralism)

ดังนั้น เครื่องหมายและขนาดของพารามิเตอร์มีผลโดยตรงต่อพฤติกรรมและเสถียรภาพของระบบประชากร

2.2 วิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral method) [1]

วิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral method) เป็นเทคนิคที่นำกระบวนการหาอินทิกรัล (Integration) มาช่วยในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น แบบจำลองลอตกา-โวลเทอรา (Lotka-Volterra model) ข้อดีของวิธีนี้คือช่วยลดผลกระทบจากความผันผวนของชุดข้อมูลดิบ ทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณได้มีความแม่นยำและนิ่งกว่าการใช้วิธีหาค่าอนุพันธ์แบบตรง ๆ หลักการทำงานของวิธีอินทิกรัลในการหาพารามิเตอร์ของระบบสมการ 3 ตัวแปร ได้แก่ ก๊าซธรรมชาติ (x), ถ่านหิน (y) และ พลังงานทดแทน (z) สามารถอธิบายขั้นตอนได้ดังนี้

พิจารณาสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ในรูปแบบทั่วไป

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1x^2 + c_1xy + d_1xz \quad (2.3)$$

โดยที่ a_1, b_1, c_1 และ d_1 คือพารามิเตอร์ของระบบที่เราต้องการหาค่า จากนั้น นำสมการมาหาอินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) ทั้งสองข้าง เทียบกับเวลา t ในช่วง $t \in [t_0, t_n]$ จะได้

$$\int_{t_0}^{t_n} \frac{dx}{dt} dt = x(t) \Big|_{t_0}^{t_n} = \int_{t_0}^{t_n} (a_1x(t) + b_1x^2(t) + c_1x(t)y(t) + d_1x(t)z(t)) dt \quad (2.4)$$

เมื่อพิจารณาช่วงเวลา $t \in [t_0, t_n]$ โดยแบ่งออกเป็นช่วงเวลาย่อย ๆ (Sub-intervals) $[t_j, t_{j+1}]$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ความสัมพันธ์ในแต่ละช่วงเวลาย่อยจะเขียนได้ดังนี้

$$x(t) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_1x(t) + b_1x^2(t) + c_1x(t)y(t) + d_1x(t)z(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.5)$$

เมื่อเราทำการกระจายพจน์ และดึงค่าพารามิเตอร์ซึ่งเป็นค่าคงตัวออกมาไว้นอกเครื่องหมายอินทิกรัล จะได้สมการผลต่างออกมาเป็น

$$\begin{aligned} x(t_{j+1}) - x(t_j) &= a_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt + b_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x^2(t) dt \\ &\quad + c_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)y(t) dt + d_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)z(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

เนื่องจากข้อมูลที่เราเป็นข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete data) เราจึงต้องประมาณค่าอินทิกรัลในแต่ละพจน์ของสมการ (2.6) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยเลือกใช้กฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezium Rule) และกำหนดให้ระยะห่างของแต่ละช่วงเวลาย่อย $\Delta t = t_{j+1} - t_j = 1$ หน่วย จะได้ผลการประมาณค่าดังนี้

$$a_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt \approx \frac{a_1}{2} (t_{j+1} - t_j) [x(t_{j+1}) + x(t_j)] = \frac{a_1}{2} [x(t_{j+1}) + x(t_j)] \quad (2.7)$$

$$b_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x^2(t) dt \approx \frac{b_1}{2} (t_{j+1} - t_j) [x^2(t_{j+1}) + x^2(t_j)] = \frac{b_1}{2} [x^2(t_{j+1}) + x^2(t_j)] \quad (2.8)$$

$$c_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)y(t) dt \approx \frac{c_1}{2} (t_{j+1} - t_j) [x(t_{j+1})y(t_{j+1}) + x(t_j)y(t_j)] = \frac{c_1}{2} [x(t_{j+1})y(t_{j+1}) + x(t_j)y(t_j)] \quad (2.9)$$

$$d_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)z(t) dt \approx \frac{d_1}{2} (t_{j+1} - t_j) [x(t_{j+1})z(t_{j+1}) + x(t_j)z(t_j)] = \frac{d_1}{2} [x(t_{j+1})z(t_{j+1}) + x(t_j)z(t_j)] \quad (2.10)$$

หากเรากำหนดให้ $D_{j+1,j} = x(t_{j+1}) - x(t_j)$ แล้วนำค่าที่ประมาณได้ทั้งหมดของทุกช่วงเวลาย่อย มาจัดเรียงใหม่ จะสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ (Matrix format) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} D_{1,0} \\ D_{2,1} \\ \vdots \\ D_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,0} & \bar{x^2}_{1,0} & \bar{xy}_{1,0} & \bar{xz}_{1,0} \\ \bar{x}_{2,1} & \bar{x^2}_{2,1} & \bar{xy}_{2,1} & \bar{xz}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{n,n-1} & \bar{x^2}_{n,n-1} & \bar{xy}_{n,n-1} & \bar{xz}_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{D} = \mathbf{XA} \quad (2.11)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการหาพารามิเตอร์ของปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากถ่านหิน (y) ก็สามารถทำตามขั้นตอนเดียวกันได้ โดยพิจารณาจากสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 y^2 + c_2 yx + d_2 yz \quad (2.12)$$

โดยที่ a_2, b_2, c_2 และ d_2 คือพารามิเตอร์ของระบบที่เราต้องการทราบค่า เมื่อนำสมการไปหาปริพันธ์จำกัดเขตทั้งสองข้าง เทียบกับเวลา t ในช่วง $t \in [t_0, t_n]$ จะได้

$$\int_{t_0}^{t_n} \frac{dy}{dt} dt = y(t) \Big|_{t_0}^{t_n} = \int_{t_0}^{t_n} (a_2 y(t) + b_2 y^2(t) + c_2 y(t)x(t) + d_2 y(t)z(t)) dt \quad (2.13)$$

เมื่อแบ่งพิจารณาเป็นช่วงเวลาย่อย $[t_j, t_{j+1}]$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$y(t) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_2 y(t) + b_2 y^2(t) + c_2 y(t)x(t) + d_2 y(t)z(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.14)$$

จากนั้นกระจายพจน์และดึงค่าคงตัวออกมา จะได้สมการผลต่างคือ

$$\begin{aligned} y(t_{j+1}) - y(t_j) &= a_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt + b_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y^2(t) dt \\ &\quad + c_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)x(t) dt + d_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)z(t) dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

ขั้นตอนถัดมาคือการใช้กฎของสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณค่าอินทิกรัลในสมการ (2.15) โดยให้

ระยะห่าง $\Delta t = 1$ หน่วย จะได้

$$a_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt \approx \frac{a_2}{2} (t_{j+1} - t_j) [y(t_{j+1}) + y(t_j)] = \frac{a_2}{2} [y(t_{j+1}) + y(t_j)] \quad (2.16)$$

$$b_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y^2(t) dt \approx \frac{b_2}{2} (t_{j+1} - t_j) [y^2(t_{j+1}) + y^2(t_j)] = \frac{b_2}{2} [y^2(t_{j+1}) + y^2(t_j)] \quad (2.17)$$

$$c_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)x(t) dt \approx \frac{c_2}{2} (t_{j+1} - t_j) [y(t_{j+1})x(t_{j+1}) + y(t_j)x(t_j)] = \frac{c_2}{2} [y(t_{j+1})x(t_{j+1}) + y(t_j)x(t_j)] \quad (2.18)$$

$$d_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)z(t) dt \approx \frac{d_2}{2} (t_{j+1} - t_j) [y(t_{j+1})z(t_{j+1}) + y(t_j)z(t_j)] = \frac{d_2}{2} [y(t_{j+1})z(t_{j+1}) + y(t_j)z(t_j)] \quad (2.19)$$

ท้ายที่สุด หากกำหนดให้ $D_{j+1,j}^y = y(t_{j+1}) - y(t_j)$ และนำค่าที่ได้มาจัดเรียงใหม่ จะได้สมการในรูปแบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} D_{1,0}^y \\ D_{2,1}^y \\ \vdots \\ D_{n,n-1}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1,0} & \bar{y}_{1,0}^2 & \bar{y}x_{1,0} & \bar{y}z_{1,0} \\ \bar{y}_{2,1} & \bar{y}_{2,1}^2 & \bar{y}x_{2,1} & \bar{y}z_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1}^2 & \bar{y}x_{n,n-1} & \bar{y}z_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{D}_y = \mathbf{Y}\mathbf{A}_y \quad (2.20)$$

และสำหรับตัวแปรตัวสุดท้าย คือปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากพลังงานทดแทน (z) สามารถดำเนินการหาพารามิเตอร์ตามขั้นตอนเดียวกันได้ดังนี้

พิจารณาสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร z ในรูปแบบทั่วไป

$$\frac{dz}{dt} = a_3 z + b_3 z^2 + c_3 z x + d_3 z y \quad (2.21)$$

โดยที่ a_3, b_3, c_3 และ d_3 คือพารามิเตอร์ของระบบ

เมื่อนำสมการไปหาอินทิกรัลจำกัดเขตในช่วงเวลา $t \in [t_0, t_n]$ และแบ่งพิจารณาเป็นช่วงเวลาย่อย $[t_j, t_{j+1}]$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$z(t) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_3 z(t) + b_3 z^2(t) + c_3 z(t)x(t) + d_3 z(t)y(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.22)$$

กระจายพจน์และดึงค่าพารามิเตอร์คงตัวออกมา จะได้สมการผลต่างคือ

$$\begin{aligned} z(t_{j+1}) - z(t_j) &= a_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt + b_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z^2(t) dt \\ &\quad + c_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)x(t) dt + d_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)y(t) dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

ทำการประมาณค่าอินทิกรัลในแต่ละพจน์ด้วยกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู โดยให้ระยะห่าง $\Delta t = 1$

หน่วย จะได้

$$a_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt \approx \frac{a_3}{2} (t_{j+1} - t_j) [z(t_{j+1}) + z(t_j)] = \frac{a_3}{2} [z(t_{j+1}) + z(t_j)] \quad (2.24)$$

$$b_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z^2(t) dt \approx \frac{b_3}{2} (t_{j+1} - t_j) [z^2(t_{j+1}) + z^2(t_j)] = \frac{b_3}{2} [z^2(t_{j+1}) + z^2(t_j)] \quad (2.25)$$

$$c_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)x(t) dt \approx \frac{c_3}{2} (t_{j+1} - t_j) [z(t_{j+1})x(t_{j+1}) + z(t_j)x(t_j)] = \frac{c_3}{2} [z(t_{j+1})x(t_{j+1}) + z(t_j)x(t_j)] \quad (2.26)$$

$$d_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)y(t) dt \approx \frac{d_3}{2} (t_{j+1} - t_j) [z(t_{j+1})y(t_{j+1}) + z(t_j)y(t_j)] = \frac{d_3}{2} [z(t_{j+1})y(t_{j+1}) + z(t_j)y(t_j)] \quad (2.27)$$

กำหนดให้ $D_{j+1,j}^z = z(t_{j+1}) - z(t_j)$ และนำค่าที่ได้มาจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} D_{1,0}^z \\ D_{2,1}^z \\ \vdots \\ D_{n,n-1}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{1,0} & \bar{z}^2_{1,0} & \bar{zx}_{1,0} & \bar{zy}_{1,0} \\ \bar{z}_{2,1} & \bar{z}^2_{2,1} & \bar{zx}_{2,1} & \bar{zy}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_{n,n-1} & \bar{z}^2_{n,n-1} & \bar{zx}_{n,n-1} & \bar{zy}_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad D_z = Z A_z \quad (2.28)$$

2.3 วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method) [1]

วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral method) เป็นเทคนิคที่พัฒนาต่อออกมาจากวิธีการเชิงอินทิกรัล เพื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น แบบจำลองลอตคา-โวลเทอร์รา (Lotka-Volterra model) ข้อได้เปรียบที่สำคัญของวิธีนี้คือ การช่วยลดทอนสเกลของชุดข้อมูลดิบที่มีค่าสูงมาก ๆ ให้อยู่ในรูปของลอการิทึม ซึ่งจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนในการคำนวณและทำให้ค่าพารามิเตอร์มีเสถียรภาพมากกว่าวิธีอินทิกรัลแบบดั้งเดิม หลักการทำงานในการหาค่าพารามิเตอร์ของระบบสมการ 3 ตัวแปร ได้แก่ ก๊าซธรรมชาติ (x), ถ่านหิน (y) และ พลังงานทดแทน (z) สามารถอธิบายขั้นตอนได้ดังนี้

พิจารณาสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ในรูปแบบทั่วไป

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1x^2 + c_1xy + d_1xz \quad (2.29)$$

โดยที่ a_1, b_1, c_1 และ d_1 คือพารามิเตอร์ของระบบที่เราต้องการหาค่า

เมื่อกำหนดให้ตัวแปร $x > 0$ เราสามารถนำ x ไปหารทั้งสองข้างของสมการ ซึ่งจะได้สมการในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a_1 + b_1x + c_1y + d_1z \quad (2.30)$$

จากนั้น นำสมการมาหาอินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) ทั้งสองข้าง เทียบกับเวลา t ในช่วง $t \in [t_0, t_n]$ จะได้

$$\int_{t_0}^{t_n} \frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt} dt = \ln(x(t)) \Big|_{t_0}^{t_n} = \int_{t_0}^{t_n} (a_1 + b_1x(t) + c_1y(t) + d_1z(t)) dt \quad (2.31)$$

เมื่อพิจารณาช่วงเวลา $t \in [t_0, t_n]$ โดยแบ่งออกเป็นช่วงเวลาย่อย ๆ (Sub-intervals) $[t_j, t_{j+1}]$ เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ความสัมพันธ์ในแต่ละช่วงเวลาย่อยจะเขียนได้ดังนี้

$$\ln(x(t)) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_1 + b_1 x(t) + c_1 y(t) + d_1 z(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.32)$$

เมื่อเราทำการกระจายพจน์ และดึงค่าพารามิเตอร์ซึ่งเป็นค่าคงตัวออกมาไว้นอกเครื่องหมายอินทิกรัล จะได้สมการผลต่างของลอการิทึมออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \ln(x(t_{j+1})) - \ln(x(t_j)) &= a_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 dt + b_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt \\ &+ c_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt + d_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt \end{aligned} \quad (2.33)$$

เนื่องจากข้อมูลที่เรามีเป็นข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง เราจึงใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezium Rule) มาประมาณค่าอินทิกรัลในแต่ละพจน์ของสมการ (2.33) โดยกำหนดให้ระยะห่าง $\Delta t = t_{j+1} - t_j = 1$ หน่วย จะได้ผลการประมาณค่าดังนี้

$$a_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 dt = a_1(t_{j+1} - t_j) = a_1(1) = a_1 \quad (2.34)$$

$$b_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt \approx \frac{b_1}{2}(t_{j+1} - t_j)[x(t_{j+1}) + x(t_j)] = \frac{b_1}{2}[x(t_{j+1}) + x(t_j)] \quad (2.35)$$

$$c_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt \approx \frac{c_1}{2}(t_{j+1} - t_j)[y(t_{j+1}) + y(t_j)] = \frac{c_1}{2}[y(t_{j+1}) + y(t_j)] \quad (2.36)$$

$$d_1 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt \approx \frac{d_1}{2}(t_{j+1} - t_j)[z(t_{j+1}) + z(t_j)] = \frac{d_1}{2}[z(t_{j+1}) + z(t_j)] \quad (2.37)$$

หากเรากำหนดให้ $L_{j+1,j} = \ln(x(t_{j+1})) - \ln(x(t_j))$ แล้วนำค่าที่ประมาณได้ทั้งหมดมาจัดเรียงใหม่ จะสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ (Matrix format) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_{1,0} \\ L_{2,1} \\ \vdots \\ L_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_{1,0} & \bar{y}_{1,0} & \bar{z}_{1,0} \\ 1 & \bar{x}_{2,1} & \bar{y}_{2,1} & \bar{z}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1} & \bar{z}_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{L} = \mathbf{X}_L \mathbf{A} \quad (2.38)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการหาพารามิเตอร์ของปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากถ่านหิน (y) ด้วยวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม ก็สามารถทำตามขั้นตอนเดียวกันได้ โดยพิจารณาจากสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y ดังนี้

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 y^2 + c_2 y x + d_2 y z \quad (2.39)$$

โดยที่ a_2, b_2, c_2 และ d_2 คือพารามิเตอร์ของระบบที่เราต้องการทราบค่า เมื่อกำหนดให้ตัวแปร $y > 0$ และนำ y ไปหารทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = a_2 + b_2 y + c_2 x + d_2 z \quad (2.40)$$

เมื่อนำสมการไปหาอินทิกรัลจำกัดเขตทั้งสองข้าง เทียบกับเวลา t ในช่วง $t \in [t_0, t_n]$ จะได้

$$\int_{t_0}^{t_n} \frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt} dt = \ln(y(t)) \Big|_{t_0}^{t_n} = \int_{t_0}^{t_n} (a_2 + b_2 y(t) + c_2 x(t) + d_2 z(t)) dt \quad (2.41)$$

เมื่อแบ่งพิจารณาเป็นช่วงเวลาย่อย $[t_j, t_{j+1}]$ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\ln(y(t)) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_2 + b_2 y(t) + c_2 x(t) + d_2 z(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.42)$$

จากนั้นกระจายพจน์และดึงค่าคงตัวออกมา จะได้สมการผลต่างของลอการิทึมคือ

$$\begin{aligned} \ln(y(t_{j+1})) - \ln(y(t_j)) &= a_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 dt + b_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt \\ &\quad + c_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt + d_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt \end{aligned} \quad (2.43)$$

ขั้นตอนถัดมาคือการใช้กฎของสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณค่าอินทิกรัลในสมการ (2.43) โดยให้ระยะห่าง $\Delta t = 1$ หน่วย จะได้

$$a_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1 dt = a_2(t_{j+1} - t_j) = a_2(1) = a_2 \quad (2.44)$$

$$b_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t) dt \approx \frac{b_2}{2}(t_{j+1} - t_j)[y(t_{j+1}) + y(t_j)] = \frac{b_2}{2}[y(t_{j+1}) + y(t_j)] \quad (2.45)$$

$$c_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t) dt \approx \frac{c_2}{2}(t_{j+1} - t_j)[x(t_{j+1}) + x(t_j)] = \frac{c_2}{2}[x(t_{j+1}) + x(t_j)] \quad (2.46)$$

$$d_2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t) dt \approx \frac{d_2}{2}(t_{j+1} - t_j)[z(t_{j+1}) + z(t_j)] = \frac{d_2}{2}[z(t_{j+1}) + z(t_j)] \quad (2.47)$$

ท้ายที่สุด หากกำหนดให้ $L_{j+1,j}^y = \ln(y(t_{j+1})) - \ln(y(t_j))$ และนำค่าที่ได้มาจัดเรียงใหม่ จะได้สมการในรูปแบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_{1,0}^y \\ L_{2,1}^y \\ \vdots \\ L_{n,n-1}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{y}_{1,0} & \bar{x}_{1,0} & \bar{z}_{1,0} \\ 1 & \bar{y}_{2,1} & \bar{x}_{2,1} & \bar{z}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{y}_{n,n-1} & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{z}_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{L}_y = \mathbf{Y}_L \mathbf{A}_y \quad (2.48)$$

และสำหรับตัวแปรตัวสุดท้าย คือปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากพลังงานทดแทน (z) ก็สามารถดำเนินการหาค่าพารามิเตอร์ตามขั้นตอนเดียวกันได้ดังนี้

พิจารณาสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร z ในรูปแบบทั่วไป

$$\frac{dz}{dt} = a_3 z + b_3 z^2 + c_3 z x + d_3 z y \quad (2.49)$$

โดยที่ a_3, b_3, c_3 และ d_3 คือพารามิเตอร์ของระบบ

เมื่อกำหนดให้ $z > 0$ และนำไปหารทั้งสองข้างของสมการ จากนั้นทำการหาอินทิกรัลจำกัดเขตและแบ่งพิจารณาเป็นช่วงเวลาย่อย จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$\ln(z(t)) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (a_3 + b_3 z(t) + c_3 x(t) + d_3 y(t)) dt \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (2.50)$$

กระจายพจน์และดึงค่าคงตัวออกมา จะได้สมการผลต่างของลอการิทึมดังนี้

$$\begin{aligned} \ln(z(t_{j+1})) - \ln(z(t_j)) &= a_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1dt + b_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)dt \\ &+ c_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)dt + d_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)dt \end{aligned} \quad (2.51)$$

จากนั้น ใช้กฎของสี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่าอินทิกรัลแต่ละพจน์ โดยให้ $\Delta t = 1$ หน่วย จะได้

$$a_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} 1dt = a_3(t_{j+1} - t_j) = a_3(1) = a_3 \quad (2.52)$$

$$b_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} z(t)dt \approx \frac{b_3}{2}(t_{j+1} - t_j)[z(t_{j+1}) + z(t_j)] = \frac{b_3}{2}[z(t_{j+1}) + z(t_j)] \quad (2.53)$$

$$c_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(t)dt \approx \frac{c_3}{2}(t_{j+1} - t_j)[x(t_{j+1}) + x(t_j)] = \frac{c_3}{2}[x(t_{j+1}) + x(t_j)] \quad (2.54)$$

$$d_3 \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(t)dt \approx \frac{d_3}{2}(t_{j+1} - t_j)[y(t_{j+1}) + y(t_j)] = \frac{d_3}{2}[y(t_{j+1}) + y(t_j)] \quad (2.55)$$

หากกำหนดให้ $L_{j+1,j}^z = \ln(z(t_{j+1})) - \ln(z(t_j))$ และนำค่ามาจัดเรียงใหม่ จะได้สมการในรูปแบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_{1,0}^z \\ L_{2,1}^z \\ \vdots \\ L_{n,n-1}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{z}_{1,0} & \bar{x}_{1,0} & \bar{y}_{1,0} \\ 1 & \bar{z}_{2,1} & \bar{x}_{2,1} & \bar{y}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{z}_{n,n-1} & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{L}_z = \mathbf{Z}_L \mathbf{A}_z \quad (2.56)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square method) [2]

จากรูปแบบเมทริกซ์ในวิธีการเชิงอินทิกรัล เราสามารถหาค่าเวกเตอร์พารามิเตอร์ A ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$A = (X^T X)^{-1} X^T D \quad (2.57)$$

โดยที่:

A คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่า

X คือ เมทริกซ์ข้อมูลตัวแปรอิสระที่ได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัล

X^T คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose) ของ X

D คือ เวกเตอร์ผลต่างของข้อมูล

ตัวอย่าง การหาค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

จากตัวอย่างวิธีการเชิงอินทิกรัล จะได้เมทริกซ์ข้อมูล X ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด 85×4 ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} 10222.66 & 104514897.28 & 26957128.74 & 44715687.89 \\ 9777.76 & 95912512.29 & 26165123.99 & 41166940.92 \\ 9245.44 & 85478582.49 & 26675013.16 & 39542842.86 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9698.55 & 94239660.83 & 26885217.78 & 57662465.84 \end{bmatrix}$$

จากนั้น นำเมทริกซ์ X มาดำเนินการสลับเปลี่ยน (Transpose) จากหลักเป็นแถว เพื่อหาเมทริกซ์ X^T ซึ่งจะได้เมทริกซ์ใหม่ขนาด 4×85 ดังนี้

$$X^T = \begin{bmatrix} 10222.66 & 9777.76 & 9245.44 & \dots & 9698.55 \\ 104514897.28 & 95912512.29 & 85478582.49 & \dots & 94239660.83 \\ 26957128.74 & 26165123.99 & 26675013.16 & \dots & 26885217.78 \\ 44715687.89 & 41166940.92 & 39542842.86 & \dots & 57662465.84 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (2.57) เพื่อหาผลคูณของเมทริกซ์ $(X^T X)$ และ $(X^T D)$ จะได้สมการเมทริกซ์สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ของปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.85 \times 10^9 & 9.23 \times 10^{13} & 2.54 \times 10^{13} & 4.52 \times 10^{13} \\ 9.23 \times 10^{13} & 9.74 \times 10^{17} & 2.64 \times 10^{17} & 4.72 \times 10^{17} \\ 2.54 \times 10^{13} & 2.64 \times 10^{17} & 7.36 \times 10^{16} & 1.30 \times 10^{17} \\ 4.52 \times 10^{13} & 4.72 \times 10^{17} & 1.30 \times 10^{17} & 2.35 \times 10^{17} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8.10 \times 10^6 \\ -7.57 \times 10^{10} \\ -2.43 \times 10^{10} \\ -1.08 \times 10^{11} \end{bmatrix}$$

เมื่อทำการคำนวณหาเมทริกซ์ผกผันและคูณเมทริกซ์ตามสมการข้างต้น จะได้ผลลัพธ์พารามิเตอร์

ของสมการปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ดังนี้

$$a_1 = 0.084308$$

$$b_1 = 0.000002$$

$$c_1 = -0.000003$$

$$d_1 = -0.000020$$

2.4 ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา [3]

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์อันดับ k ถือว่าเป็นวิธีที่ดี แต่ปัญหาของการใช้อยู่ที่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ปรากฏในสูตรของเทย์เลอร์จะยุ่งยากมากถ้า k มีค่าสูง ดังนั้นจึงมีผู้ศึกษาและนำเสนอระเบียบวิธีใหม่ ๆ ขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว (นั่นคือ ต้องการหลีกเลี่ยงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน) ดังเช่นระเบียบวิธีที่เรียกว่า ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา โดยในปัจจุบันมีมากมายหลายสูตร แต่ที่นิยมใช้และสูตรไม่ยุ่งยากมากนักก็คือ ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\begin{aligned} F_1 &= hf(x_i, y_i) \\ F_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{F_1}{2}\right) \\ F_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{F_2}{2}\right) \\ F_4 &= hf(x_i + h, y_i + F_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

สำหรับขั้นตอนวิธีในการคำนวณเป็นเช่นเดียวกับระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ เพียงแต่เปลี่ยนสูตรในการคำนวณในขั้นที่ 2 เท่านั้นดังนี้

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่

กำหนดให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีสมการและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad \text{และ} \quad y(a) = y_0$$

1. กำหนดค่า n ที่เหมาะสม ให้ $x_0 = a$ และ

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (\text{ค่า } h \text{ ควรน้อยกว่า } 1)$$

2. สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ คำนวณค่า

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

ตัวอย่าง 1 จงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ หาค่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = x - 2xy, \quad y(0) = 1$$

วิธีทำ

กำหนด $h = 0.25$, $x_0 = 0$ และ $y_0 = 1$ เป็นค่าเริ่มต้น

จากสูตรจะได้สูตรคำนวณในแต่ละรอบดังนี้

$$F_1 = hx_i(1 - 2y_i)$$

$$F_2 = h \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(1 - 2 \left(y_i + \frac{F_1}{2} \right) \right)$$

$$F_3 = h \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(1 - 2 \left(y_i + \frac{F_2}{2} \right) \right)$$

$$F_4 = h(x_i + h)(1 - 2(y_i + F_3))$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

รอบที่ 1 คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0)(1 - 2(1)) = 0$$

$$F_2 = (0.25)(0 + 0.125)(1 - 2(1 + 0)) = -0.031250$$

$$F_3 = (0.25)(0 + 0.125) \left(1 - 2 \left(1 + \frac{-0.031250}{2} \right) \right) = -0.030273$$

$$F_4 = (0.25)(0 + 0.25)(1 - 2(1 - 0.030273)) = -0.058716$$

ดังนั้น

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.031250) + 2(-0.030273) + (-0.058716)) = 0.969706$$

$$x_1 = x_0 + h = 0.25$$

รอบที่ 2 คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.25)(1 - 2(0.969706)) = -0.058713$$

$$F_2 = (0.25)(0.25 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.969706 + \frac{-0.058713}{2} \right) \right) = -0.082566$$

$$F_3 = (0.25)(0.25 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.969706 + \frac{-0.082566}{2} \right) \right) = -0.080329$$

$$F_4 = (0.25)(0.25 + 0.25)(1 - 2(0.969706 - 0.080329)) = -0.097344$$

ดังนั้น

$$y_2 = 0.969706 + \frac{1}{6}(-0.058713 + 2(-0.082566) + 2(-0.080329) + (-0.097344)) = 0.889398$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.50$$

รอบที่ 3 คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.50)(1 - 2(0.889398)) = -0.097350$$

$$F_2 = (0.25)(0.50 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.889398 + \frac{-0.097350}{2} \right) \right) = -0.106476$$

$$F_3 = (0.25)(0.50 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.889398 + \frac{-0.106476}{2} \right) \right) = -0.105050$$

$$F_4 = (0.25)(0.50 + 0.25)(1 - 2(0.889398 - 0.105050)) = -0.106630$$

ดังนั้น

$$y_3 = 0.889398 + \frac{1}{6}(-0.097350 + 2(-0.106476) + 2(-0.105050) + (-0.106630)) = 0.784893$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.75$$

รอบที่ 4 คำนวณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$F_1 = (0.25)(0.75)(1 - 2(0.784893)) = -0.106835$$

$$F_2 = (0.25)(0.75 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.784893 + \frac{-0.106835}{2} \right) \right) = -0.101270$$

$$F_3 = (0.25)(0.75 + 0.125) \left(1 - 2 \left(0.784893 + \frac{-0.101270}{2} \right) \right) = -0.102488$$

$$F_4 = (0.25)(0.75 + 0.25)(1 - 2(0.784893 - 0.102488)) = -0.091202$$

ดังนั้น

$$y_4 = 0.784893 + \frac{1}{6}(-0.106835 + 2(-0.101270) + 2(-0.102488) + (-0.091202))$$

$$= 0.683968$$

$$x_4 = x_3 + h = 1.00$$

สามารถเปรียบเทียบผลที่ได้ในตัวอย่าง 1 กับผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y = \frac{1 + e^{-x^2}}{2}$$

ซึ่งจะพบว่ามีคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อย ดังจะเห็นได้จากตารางข้างล่างนี้

i	x_i	(ตัวอย่าง 1) y_i	(ค่าจริง) y_i
1	0.00	1	1
2	0.25	0.969725	0.969706
3	0.50	0.889532	0.889400
4	0.75	0.785112	0.784891
5	1.00	0.684138	0.683939

2.5 การประเมินความแม่นยำของแบบจำลอง [4]

1. เปอร์เซ็นต์ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Percentage Error ; MAPE)
วัดความคลาดเคลื่อนในเชิงเปอร์เซ็นต์โดยพิจารณาค่าเฉลี่ยของความแตกต่างสัมบูรณ์
ระหว่างค่าจริงและค่าที่ได้จากแบบจำลองหารด้วยค่าจริง

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100$$

โดยที่

n คือจำนวนข้อมูล

y_i คือค่าจริงของข้อมูล

$\hat{y}_i$ คือค่าที่คาดการณ์โดยแบบจำลอง

ตารางที่ 2 ความสามารถในการทำนาย MAPE

MAPE	ระดับความแม่นยำ
$MAPE < 10$	แม่นยำสูง
$10 \leq MAPE < 20$	แม่นยำ
$20 \leq MAPE < 50$	พอสมควร
$MAPE \geq 50$	ไม่มีความแม่นยำ

2. ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Error ; MAE)
วัดความคลาดเคลื่อนโดยใช้ค่าเฉลี่ยของค่าความแตกต่างสัมบูรณ์ ระหว่างค่าจริงและค่าที่ได้
จากแบบจำลอง หากค่า MAE เข้าใกล้ 0 แสดงว่า MAE มีความแม่นยำสูง

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

โดยที่

n คือจำนวนข้อมูล

y_i คือค่าจริงของข้อมูล

$\hat{y}_i$ คือค่าที่คาดการณ์โดยแบบจำลอง

3. ค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Square Error ; RMSE) วัดความคลาดเคลื่อนโดยให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่มากมีน้ำหนักมากขึ้น เนื่องจากมีการยกกำลังสองก่อนการคำนวณ โดยค่า RMSE จะมากกว่าหรือเท่ากับค่า MAE หากค่า RMSE สูงกว่าค่า MAE มาก แสดงว่าแบบจำลองมีค่าความผิดพลาดมาก

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

โดยที่

n คือจำนวนข้อมูล

y_i คือค่าจริงของข้อมูล

$\hat{y}_i$ คือค่าที่คาดการณ์โดยแบบจำลอง

2.6 จุดสมดุล (Equilibrium Point) [5]

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาชุมชนของสิ่งมีชีวิตสามชนิดที่มีการแข่งขันกันแบบสองทาง โดยสร้างแบบจำลองด้วยระบบ Lotka–Volterra ต่อไปนี้

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2 (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3 (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3) \end{cases} \quad (2.57)$$

โดยที่เราสมมติว่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมด a_{ij} และ b_i เป็นจำนวนบวกอย่างเคร่งครัด

ต่อไป เราจะจำกัดการพิจารณาอยู่ในออร์แทนต์บวกปิด $\mathbb{R}_+^3$ และแทนออร์แทนต์บวกเปิดด้วย $\text{int } \mathbb{R}_+^3$

นอกจากนี้ เรายังสมมติว่าไม่เนอร์อันดับสองตามแนวทแยงทั้งหมดของเมทริกซ์ (a_{ij}) และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ปฏิสัมพันธ์ของชนิดพันธุ์ไม่เป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} d_{1212} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \\ d_{1313} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \neq 0 \\ d_{2323} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0 \\ \det(a_{ij}) &\neq 0 \end{aligned}$$

ภายใต้สมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ a_{ij} และ b_i ($i, j = 1, 2, 3$) ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (13) มีจุดสมดุลที่มีองค์ประกอบไม่เป็นลบได้มากที่สุดแปดจุด ดังต่อไปนี้ จากสมการ

$$\begin{cases} b_1x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1x_3 = 0 \\ b_2x_2 - a_{21}x_2x_1 - a_{22}x_2^2 - a_{23}x_2x_3 = 0 \\ b_3x_3 - a_{31}x_1x_3 - a_{32}x_2x_3 - a_{33}x_3^2 = 0 \end{cases}$$

เราจะได้จุดสมมูลแปดจุดดังต่อไปนี้

$$O(0,0,0), \quad E_1\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0, 0\right), \quad E_2\left(0, \frac{b_2}{a_{22}}, 0\right), \quad E_3\left(0, 0, \frac{b_3}{a_{33}}\right)$$

$$E_{12}\left(\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, 0\right)$$

$$E_{13}\left(\frac{b_1a_{33} - b_3a_{13}}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}, 0, \frac{b_3a_{11} - b_1a_{31}}{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}\right)$$

$$E_{23}\left(0, \frac{b_2a_{33} - b_3a_{23}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}, \frac{b_3a_{22} - b_2a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}\right)$$

และ

$$E(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$$

โดยที่ (x_1^*, x_2^*, x_3^*) เป็นคำตอบเอกลักษณ์ของระบบเชิงเส้น

$$\{a_{ij}x_j = b_i\}$$

กล่าวคือ

$$x_1^* = \frac{d_1}{d}, \quad x_2^* = \frac{d_2}{d}, \quad x_3^* = \frac{d_3}{d}$$

เมื่อ

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} - a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33} + a_{21}a_{13}b_3 + a_{31}b_1a_{23} - a_{31}a_{13}b_2$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}b_3a_{22} - a_{11}b_2a_{32} - a_{21}a_{12}b_3 + a_{21}b_1a_{32} + a_{31}a_{12}b_2 - a_{31}b_1a_{22}$$

ต่อไป เราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้สำหรับไมเนอร์ของเมทริกซ์ขยาย $(a_{ij} : b_i)$

$$d_{1224} = -b_1a_{22} + b_2a_{12}, \quad d_{1214} = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \quad d_{1334} = -b_1a_{33} + b_3a_{13},$$

$$d_{1314} = b_3a_{11} - b_1a_{31}, \quad d_{2334} = -b_2a_{33} + b_3a_{23}, \quad d_{2324} = b_3a_{22} - b_2a_{32}.$$

ดังนั้น จุดสมมูลในระนาบพิกัดสามารถเขียนได้ดังนี้

$$E_{12} \left(-\frac{d_{1224}}{d_{1212}}, \frac{d_{1214}}{d_{1212}}, 0 \right), \quad E_{13} \left(-\frac{d_{1334}}{d_{1313}}, 0, \frac{d_{1314}}{d_{1313}} \right), \quad E_{23} \left(0, -\frac{d_{2334}}{d_{2323}}, \frac{d_{2324}}{d_{2323}} \right).$$

2.7 เมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) [5]

เมทริกซ์จาโคเบียนเป็นเครื่องมือที่ใช้วิเคราะห์พฤติกรรมเฉพาะที่ของระบบในบริเวณใกล้จุดสมดุล โดยเมทริกซ์จาโคเบียน J สำหรับระบบนี้มีรูปทั่วไปคือ:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

เพื่อศึกษาความเสถียรของระบบ

บทบาทสำคัญของเมทริกซ์จาโคเบียนคือการใช้คำนวณค่าไอเกน (eigenvalues) ซึ่งสามารถนำมาพิจารณาลักษณะของจุดสมดุลได้ ดังนี้

- หากค่าไอเกนทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นลบ แสดงว่าจุดสมดุลนั้นเป็น **จุดเสถียร (Attractor)**
- หากค่าไอเกนทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นบวก แสดงว่าจุดสมดุลนั้นเป็น **จุดไม่เสถียร (Repeller)**
- หากมีค่าไอเกนบางค่ามีส่วนจริงเป็นบวก และบางค่ามีส่วนจริงเป็นลบ แสดงว่าจุดสมดุลนั้นเป็น **จุดอานม้า (Saddle point)**

โดยได้แสดงรูปแบบทั่วไปของจาโคเบียนเมทริกซ์สำหรับระบบ 3 มิติไว้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} b_1 - 2a_{11}\frac{d_1}{d} - a_{12}\frac{d_2}{d} - a_{13}\frac{d_3}{d} & -a_{21}\frac{d_1}{d} & -a_{31}\frac{d_1}{d} \\ -a_{12}\frac{d_2}{d} & b_2 - a_{21}\frac{d_1}{d} - 2a_{22}\frac{d_2}{d} - a_{23}\frac{d_3}{d} & -a_{32}\frac{d_2}{d} \\ -a_{13}\frac{d_3}{d} & -a_{23}\frac{d_3}{d} & b_3 - a_{31}\frac{d_1}{d} - a_{32}\frac{d_2}{d} - 2a_{33}\frac{d_3}{d} \end{pmatrix}$$

3 เนื้อหา

นำข้อมูลสถิติที่ได้จากเว็บไซต์สำนักงานนโยบายและแผนพลังงาน (EPPO) กระทรวงพลังงาน ซึ่งเป็นข้อมูลปริมาณการผลิตไฟฟ้ารายเดือน อย่างไรก็ตาม ข้อมูลดิบที่ได้มายังไม่สามารถนำไปแทนค่าในแบบจำลองเชิงอนุพันธ์ได้โดยตรง เนื่องจากแบบจำลองต้องการข้อมูลในลักษณะที่สอดคล้องกับรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์

ดังนั้น จึงจำเป็นต้องแปลงข้อมูลให้เหมาะสม โดยพิจารณาข้อมูลตั้งแต่เดือนตุลาคม ปี 2018 ถึงเดือนธันวาคม ปี 2025 และจัดรูปแบบข้อมูลให้อยู่ในลักษณะช่วงเวลาไม่ต่อเนื่อง เพื่อให้สามารถนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองได้

ในการดำเนินการดังกล่าว จะใช้สองวิธีหลัก ได้แก่ วิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral Method) และ วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method)

ขั้นตอนที่ 1 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบสมการไม่ต่อเนื่อง
โดยจะเปรียบเทียบ 2 วิธีดังนี้

1.1 วิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral method) [1]

แสดงการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.11) สามารถเขียนระบบสมการความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$D = XA \quad (3.1)$$

เมื่อ

$$D = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ D_{2,1} \\ \vdots \\ D_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,0} & \bar{x}_{1,0}^2 & \overline{xy}_{1,0} & \overline{xz}_{1,0} \\ \bar{x}_{2,1} & \bar{x}_{2,1}^2 & \overline{xy}_{2,1} & \overline{xz}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{n,n-1} & \bar{x}_{n,n-1}^2 & \overline{xy}_{n,n-1} & \overline{xz}_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่าข้อมูลของเดือนที่ 1 ตุลาคม 2018 (t_0) และเดือนที่ 2 พฤศจิกายน 2018 (t_1) ลงในแต่ละพจน์ จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} D_{1,0} &= 10332.75 - 10112.57 = 220.18 \\ a_1 \bar{x}_{1,0} &= a_1 \left[\frac{10332.75 + 10112.57}{2} \right] = a_1 (10222.66) \\ b_1 \bar{x}_{1,0}^2 &= b_1 \left[\frac{10332.75^2 + 10112.57^2}{2} \right] = b_1 (104514897.28) \\ c_1 \overline{xy}_{1,0} &= c_1 \left[\frac{10332.75(2428.71) + 10112.57(2849.82)}{2} \right] = c_1 (26957128.74) \\ d_1 \overline{xz}_{1,0} &= d_1 \left[\frac{10332.75(4142.55) + 10112.57(4610.84)}{2} \right] = d_1 (44715687.89) \end{aligned}$$

จะได้สมการในช่วงเวลาแรก คือ

$$220.18 = 10222.66a_1 + 104514897.28b_1 + 26957128.74c_1 + 44715687.89d_1$$

เมื่อสามารถคำนวณค่า $D_{1,0}$ ได้แล้ว จะดำเนินการหา $D_{n,n-1}$ ในลักษณะเดียวกันกับข้อมูลทั้งหมดจนครบ 85 ช่วงเวลา และนำตัวเลขที่คำนวณได้มาจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์

$D = \mathbf{XA}$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 220.18 \\ -1109.99 \\ 45.35 \\ \vdots \\ -843.30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10222.66 & 104514897.28 & 26957128.74 & 44715687.89 \\ 9777.76 & 95912512.29 & 26165123.99 & 41166940.92 \\ 9245.44 & 85478582.49 & 26675013.16 & 39542842.86 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9698.55 & 94239660.83 & 26885217.78 & 57662465.84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

แสดงการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับปริมาณถ่านหิน (y) ได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.20) สามารถเขียนระบบสมการความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{YA}_y \quad (3.3)$$

เมื่อ

$$\mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} D_{1,0}^y \\ D_{2,1}^y \\ \vdots \\ D_{n,n-1}^y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1,0} & \bar{y}_{1,0}^2 & \bar{y}x_{1,0} & \bar{y}z_{1,0} \\ \bar{y}_{2,1} & \bar{y}_{2,1}^2 & \bar{y}x_{2,1} & \bar{y}z_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1}^2 & \bar{y}x_{n,n-1} & \bar{y}z_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

ในการทำงานเดียวกัน เมื่อแทนค่าข้อมูลของเดือนที่ 1 ตุลาคม 2018 (t_0) และเดือนที่ 2 พฤศจิกายน 2018 (t_1) ลงในแต่ละพจน์ของสมการอัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงปริมาณถ่านหิน จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} D_{1,0}^y &= y(t_1) - y(t_0) = 2428.71 - 2849.82 = -421.11 \\ a_2 \bar{y}_{1,0} &= a_2 \left[\frac{2428.71 + 2849.82}{2} \right] = a_2(2639.27) \\ b_2 \bar{y}_{1,0}^2 &= b_2 \left[\frac{2428.71^2 + 2849.82^2}{2} \right] = b_2(7010053.15) \\ c_2 \bar{y}x_{1,0} &= c_2 \left[\frac{2428.71(10332.75) + 2849.82(10112.57)}{2} \right] = c_2(26957128.74) \\ d_2 \bar{y}z_{1,0} &= d_2 \left[\frac{2428.71(4142.55) + 2849.82(4610.84)}{2} \right] = d_2(11600558.29) \end{aligned}$$

จะได้สมการในช่วงเวลาแรกของถ่านหิน คือ

$$-421.11 = 2639.27a_2 + 7010053.15b_2 + 26957128.74c_2 + 11600558.29d_2$$

เมื่อคำนวณค่า $D_{1,0}^y$ ได้แล้ว จะดำเนินการหา $D_{n,n-1}^y$ ในลักษณะเดียวกันกับข้อมูลทั้งหมดจนครบ 85 ช่วงเวลา และนำตัวเลขที่คำนวณได้มาจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ $D_y = Y A_y$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -421.11 \\ 524.31 \\ -135.29 \\ \vdots \\ -473.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2639.27 & 7010053.15 & 26957128.74 & 11600558.29 \\ 2690.87 & 7309479.69 & 26165123.99 & 11359040.08 \\ 2885.38 & 8329962.74 & 26675013.16 & 12341465.09 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2761.80 & 7683518.80 & 26885217.78 & 16465699.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

สำหรับตัวแปร z ซึ่งแทนปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากพลังงานทดแทน ก็สามารถดำเนินการคำนวณและจัดรูปแบบเมทริกซ์ในลักษณะเดียวกัน จะได้รูปแบบสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$D_z = Z A_z \quad (3.5)$$

เมื่อ

$$D_z = \begin{bmatrix} D_{1,0}^z \\ D_{2,1}^z \\ \vdots \\ D_{n,n-1}^z \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \bar{z}_{1,0} & \bar{z}_{1,0}^2 & \bar{z}x_{1,0} & \bar{z}y_{1,0} \\ \bar{z}_{2,1} & \bar{z}_{2,1}^2 & \bar{z}x_{2,1} & \bar{z}y_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_{n,n-1} & \bar{z}_{n,n-1}^2 & \bar{z}x_{n,n-1} & \bar{z}y_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A_z = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

1.2 วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบล็อกการิทึม (Logaritmic Integral method) [1]

แสดงการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับปริมาณก๊าซธรรมชาติ (x) ได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.38) สามารถเขียนระบบสมการความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$L = X_L A \quad (3.6)$$

เมื่อ

$$L = \begin{bmatrix} L_{1,0} \\ L_{2,1} \\ \vdots \\ L_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad X_L = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_{1,0} & \bar{y}_{1,0} & \bar{z}_{1,0} \\ 1 & \bar{x}_{2,1} & \bar{y}_{2,1} & \bar{z}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1} & \bar{z}_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่าข้อมูลของเดือนที่ 1 ตุลาคม 2018 (t_0) และเดือนที่ 2 พฤศจิกายน 2018 (t_1) ลงในแต่ละพจน์ จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} L_{1,0} &= \ln(10332.75) - \ln(10112.57) = 0.021539 \\ a_1(1) &= a_1 \\ b_1 \bar{x}_{1,0} &= b_1 \left[\frac{10332.75 + 10112.57}{2} \right] = b_1(10222.66) \\ c_1 \bar{y}_{1,0} &= c_1 \left[\frac{2428.71 + 2849.82}{2} \right] = c_1(2639.27) \\ d_1 \bar{z}_{1,0} &= d_1 \left[\frac{4142.55 + 4610.84}{2} \right] = d_1(4376.70) \end{aligned}$$

จะได้สมการในช่วงเวลาแรก คือ

$$0.021539 = a_1 + 10222.66b_1 + 2639.27c_1 + 4376.70d_1$$

เมื่อสามารถคำนวณค่า $L_{1,0}$ ได้แล้ว จะดำเนินการหา $L_{n,n-1}$ ในลักษณะเดียวกันกับข้อมูลทั้งหมดจนครบ 85 ช่วงเวลา และนำตัวเลขที่คำนวณได้มาจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ $L = X_L A$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0.021539 \\ -0.113644 \\ 0.004905 \\ \vdots \\ -0.087006 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10222.66 & 2639.27 & 4376.70 \\ 1 & 9777.76 & 2690.87 & 4214.34 \\ 1 & 9245.44 & 2885.38 & 4277.04 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 9698.55 & 2761.80 & 5928.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

แสดงการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับปริมาณถ่านหิน (y) ได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.48) สามารถเขียนระบบสมการความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$L_y = Y_L A_y \quad (3.8)$$

เมื่อ

$$L_y = \begin{bmatrix} L_{1,0}^y \\ L_{2,1}^y \\ \vdots \\ L_{n,n-1}^y \end{bmatrix}, \quad Y_L = \begin{bmatrix} 1 & \bar{y}_{1,0} & \bar{x}_{1,0} & \bar{z}_{1,0} \\ 1 & \bar{y}_{2,1} & \bar{x}_{2,1} & \bar{z}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{y}_{n,n-1} & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{z}_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A_y = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทนค่าข้อมูลของเดือนที่ 1 ตุลาคม 2018 (t_0) และเดือนที่ 2 พฤศจิกายน 2018 (t_1) ลงในแต่ละพจน์ด้วยวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอกการิทึม จะได้สมการ

ดังนี้

$$\begin{aligned}
 L_{1,0}^y &= \ln(2428.71) - \ln(2849.82) = -0.159896 \\
 a_2(1) &= a_2 \\
 b_2 \bar{y}_{1,0} &= b_2 \left[\frac{2428.71 + 2849.82}{2} \right] = b_2(2639.27) \\
 c_2 \bar{x}_{1,0} &= c_2 \left[\frac{10332.75 + 10112.57}{2} \right] = c_2(10222.66) \\
 d_2 \bar{z}_{1,0} &= d_2 \left[\frac{4142.55 + 4610.84}{2} \right] = d_2(4376.70)
 \end{aligned}$$

จะได้สมการในช่วงเวลาแรกของถ่านหิน คือ

$$-0.159896 = a_2 + 2639.27b_2 + 10222.66c_2 + 4376.70d_2$$

เมื่อสามารถคำนวณค่า $L_{1,0}^y$ ได้แล้ว จะดำเนินการหา $L_{n,n-1}^y$ ในลักษณะเดียวกันกับข้อมูลทั้งหมดจนครบ 85 ช่วงเวลา และนำตัวเลขที่คำนวณได้มาจัดให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ $L_y = Y_L A_y$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -0.159896 \\ 0.195468 \\ -0.046897 \\ \vdots \\ -0.171759 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2639.27 & 10222.66 & 4376.70 \\ 1 & 2690.87 & 9777.76 & 4214.34 \\ 1 & 2885.38 & 9245.44 & 4277.04 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2761.80 & 9698.55 & 5928.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ในทางปฏิบัติ การหาค่าพารามิเตอร์ของสมการพลังงานทดแทน (z) สามารถดำเนินการในทำนองเดียวกันจะได้รูปแบบสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$L_z = Z_L A_z \quad (3.10)$$

เมื่อ

$$L_z = \begin{bmatrix} L_{1,0}^z \\ L_{2,1}^z \\ \vdots \\ L_{n,n-1}^z \end{bmatrix}, \quad Z_L = \begin{bmatrix} 1 & \bar{z}_{1,0} & \bar{x}_{1,0} & \bar{y}_{1,0} \\ 1 & \bar{z}_{2,1} & \bar{x}_{2,1} & \bar{y}_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{z}_{n,n-1} & \bar{x}_{n,n-1} & \bar{y}_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A_z = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

แม้ว่าเทคนิคทั้งสองจะถูกเรียกว่า วิธีเชิงอินทิกรัล และ วิธีเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม แต่ในขั้นตอนการจัดรูปสมการเพื่อนำไปคำนวณจริงนั้น รูปแบบของสมการที่ได้จะประกอบด้วยผลต่างของตัวแปรทางฝั่งซ้ายของสมการ จับคู่กับค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลทางฝั่งขวาของสมการ การจัดรูปลักษณะนี้คือหัวใจสำคัญที่ช่วยแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้กลายเป็นระบบสมการที่สามารถแก้ปัญหาได้

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method) [2]

การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method) เป็นวิธีการคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง เพื่อลดความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงและค่าที่ได้จากแบบจำลองให้น้อยที่สุด เราจะทำการหาพารามิเตอร์จากระบบสมการที่ได้จาก 2 วิธี ดังนี้

1. วิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral Method)

1.1 หาค่า a_1, b_1, c_1, d_1 จาก $D = XA$ และโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A = (X^T X)^{-1} X^T D$ เมื่อแทนค่าเมทริกซ์ข้อมูลและค่านวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.85 \times 10^9 & 9.23 \times 10^{13} & 2.54 \times 10^{13} & 4.52 \times 10^{13} \\ 9.23 \times 10^{13} & 9.74 \times 10^{17} & 2.64 \times 10^{17} & 4.72 \times 10^{17} \\ 2.54 \times 10^{13} & 2.64 \times 10^{17} & 7.36 \times 10^{16} & 1.30 \times 10^{17} \\ 4.52 \times 10^{13} & 4.72 \times 10^{17} & 1.30 \times 10^{17} & 2.35 \times 10^{17} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8.10 \times 10^6 \\ -7.57 \times 10^{10} \\ -2.43 \times 10^{10} \\ -1.08 \times 10^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.084308 \\ 0.000002 \\ -0.000003 \\ -0.000020 \end{bmatrix}$$

1.2 หาค่า a_2, b_2, c_2, d_2 จาก $D_y = Y A_y$ และโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A_y = (Y^T Y)^{-1} Y^T D_y$ เมื่อแทนค่าและค่านวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.36 \times 10^{16} & 2.07 \times 10^{20} & 7.74 \times 10^{20} & 3.82 \times 10^{20} \\ 2.07 \times 10^{20} & 5.86 \times 10^{23} & 2.18 \times 10^{24} & 1.07 \times 10^{24} \\ 7.74 \times 10^{20} & 2.18 \times 10^{24} & 8.16 \times 10^{24} & 4.01 \times 10^{24} \\ 3.82 \times 10^{20} & 1.07 \times 10^{24} & 4.01 \times 10^{24} & 1.98 \times 10^{24} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.74 \times 10^{10} \\ -4.91 \times 10^{13} \\ -1.83 \times 10^{14} \\ -8.86 \times 10^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.062365 \\ 0.000009 \\ 0.000003 \\ 0.000000 \end{bmatrix}$$

1.3 หาค่า a_3, b_3, c_3, d_3 จาก $D_z = Z A_z$ และโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A_z = (Z^T Z)^{-1} Z^T D_z$ เมื่อแทนค่าและค่านวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.35 \times 10^{17} & 1.25 \times 10^{21} & 2.50 \times 10^{21} & 6.84 \times 10^{20} \\ 1.25 \times 10^{21} & 6.64 \times 10^{24} & 1.33 \times 10^{25} & 3.64 \times 10^{24} \\ 2.50 \times 10^{21} & 1.33 \times 10^{25} & 2.65 \times 10^{25} & 7.28 \times 10^{24} \\ 6.84 \times 10^{20} & 3.64 \times 10^{24} & 7.28 \times 10^{24} & 1.99 \times 10^{24} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.32 \times 10^{10} \\ 6.98 \times 10^{13} \\ 1.40 \times 10^{14} \\ 3.84 \times 10^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.147932 \\ -0.000002 \\ 0.000014 \\ 0.000007 \end{bmatrix}$$

สรุปผล โดยวิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral Method) ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ชุดพารามิเตอร์ดังนี้

$a_1 = 0.084308$	$b_1 = 0.000002$	$c_1 = -0.000003$	$d_1 = -0.000020$
$a_2 = -0.062365$	$b_2 = 0.000009$	$c_2 = 0.000003$	$d_2 = 0.000000$
$a_3 = -0.147932$	$b_3 = -0.000002$	$c_3 = 0.000014$	$d_3 = 0.000007$

2. วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method)

2.1 หาค่า a_1, b_1, c_1, d_1 จาก $L = X_L A$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A = (X_L^T X_L)^{-1} X_L^T L$ เมื่อแทนค่าเมทริกซ์ข้อมูลและคำนวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.50 \times 10^1 & 8.85 \times 10^5 & 2.54 \times 10^5 & 4.52 \times 10^5 \\ 8.85 \times 10^5 & 9.23 \times 10^9 & 2.64 \times 10^9 & 4.72 \times 10^9 \\ 2.54 \times 10^5 & 2.64 \times 10^9 & 7.74 \times 10^8 & 1.30 \times 10^9 \\ 4.52 \times 10^5 & 4.72 \times 10^9 & 1.30 \times 10^9 & 2.35 \times 10^9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8.52 \times 10^{-1} \\ -8.10 \times 10^3 \\ -2.55 \times 10^3 \\ -3.89 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.124023 \\ 0.000002 \\ -0.000014 \\ -0.000020 \end{bmatrix}$$

2.2 หาค่า a_2, b_2, c_2, d_2 จาก $L_y = Y_L A_y$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A_y = (Y_L^T Y_L)^{-1} Y_L^T L_y$ เมื่อแทนค่าและคำนวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.50 \times 10^1 & 2.54 \times 10^5 & 8.85 \times 10^5 & 4.52 \times 10^5 \\ 2.54 \times 10^5 & 7.74 \times 10^8 & 2.64 \times 10^9 & 1.30 \times 10^9 \\ 8.85 \times 10^5 & 2.64 \times 10^9 & 9.23 \times 10^9 & 4.72 \times 10^9 \\ 4.52 \times 10^5 & 1.30 \times 10^9 & 4.72 \times 10^9 & 2.35 \times 10^9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.34 \times 10^0 \\ -3.95 \times 10^3 \\ -1.32 \times 10^4 \\ -6.81 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.049413 \\ 0.000007 \\ 0.000003 \\ -0.000001 \end{bmatrix}$$

2.3 หาค่า a_3, b_3, c_3, d_3 จาก $L_z = Z_L A_z$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$A_z = (Z_L^T Z_L)^{-1} Z_L^T L_z$ เมื่อแทนค่าและคำนวณ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.50 \times 10^1 & 4.52 \times 10^5 & 8.85 \times 10^5 & 2.54 \times 10^5 \\ 4.52 \times 10^5 & 2.35 \times 10^9 & 4.72 \times 10^9 & 1.30 \times 10^9 \\ 8.85 \times 10^5 & 4.72 \times 10^9 & 9.23 \times 10^9 & 2.64 \times 10^9 \\ 2.54 \times 10^5 & 1.30 \times 10^9 & 2.64 \times 10^9 & 7.74 \times 10^8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.15 \times 10^0 \\ 1.09 \times 10^4 \\ 2.14 \times 10^4 \\ 6.20 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.103348 \\ -0.000002 \\ 0.000012 \\ -0.000002 \end{bmatrix}$$

สรุปผล โดยวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method) ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ชุดพารามิเตอร์ดังนี้

$a_1 = 0.124023$	$b_1 = 0.000002$	$c_1 = -0.000014$	$d_1 = -0.000020$
$a_2 = -0.049413$	$b_2 = 0.000007$	$c_2 = 0.000003$	$d_2 = -0.000001$
$a_3 = -0.103348$	$b_3 = -0.000002$	$c_3 = 0.000012$	$d_3 = -0.000002$

ขั้นตอนที่ 3 เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองจากพารามิเตอร์ทั้ง 2 ชุด [4]

ในขั้นตอนนี้ เราจะทำการทดสอบความคลาดเคลื่อนในการสร้างแบบจำลองจากพารามิเตอร์ทั้งสองชุด โดยใช้การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนด้วยตัวชี้วัดทางสถิติ ได้แก่ ค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (MAPE), ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (MAE) และค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) โดยจะทำการเปรียบเทียบปริมาณการผลิตไฟฟ้าจากข้อมูลจริง กับข้อมูลที่เป็นผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (RK4) ของสมการลอตกา-โวลเทอร์รา ดังนี้

3.1 ชุดพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัล (Integral Method)

จากชุดพารามิเตอร์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 สามารถนำมาสร้างระบบสมการลอตกา-โวลเทอร์รา ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = 0.084308x + 0.000002x^2 - 0.000003xy - 0.000020xz \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.062365y + 0.000009y^2 + 0.000003yx + 0.000000yz \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.147932z - 0.000002z^2 + 0.000014zx + 0.000007zy \quad (4.3)$$

เมื่อนำสมการดังกล่าวไปหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (RK4) เพื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลจริง จะได้ผลลัพธ์ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2: เปรียบเทียบปริมาณการผลิตไฟฟ้าจริงและค่าประมาณจากแบบจำลองด้วยวิธี RK4 [3] ในระยะเวลา 7 ปี 2 เดือน ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2561 (เดือนที่ 0) ถึง พฤศจิกายน พ.ศ. 2568 (เดือนที่ 85)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
0	10112.57	10112.57	2849.82	2849.82	4610.84	4610.84
1	10332.75	10191.12	2428.71	2831.55	4142.55	4598.11
2	9222.76	10269.04	2953.02	2813.68	4286.13	4585.55
3	9268.11	10346.33	2817.73	2796.20	4267.94	4573.16
4	9287.21	10423.01	2733.24	2779.11	4078.04	4560.94
5	10952.87	10499.08	3196.02	2762.38	4722.22	4548.88
6	10900.06	10574.56	3167.24	2746.03	4366.32	4536.98
7	11788.13	10649.44	3120.05	2730.03	4410.51	4525.24
8	10707.57	10723.75	3099.32	2714.39	4419.58	4513.65
9	10164.99	10797.47	3338.72	2699.09	4420.82	4502.21
10	9293.48	10870.63	3051.52	2684.14	5261.89	4490.93

อ่านต่อหน้าถัดไป...

ตารางที่ 2 (ต่อ)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
11	9352.44	10943.22	2923.65	2669.51	4734.44	4479.79
12	10614.26	11015.26	3101.23	2655.22	4445.85	4468.80
13	10660.78	11086.75	2719.38	2641.24	3623.46	4457.96
14	8850.72	11157.69	2557.12	2627.57	4507.97	4447.25
15	9831.99	11228.11	3257.31	2614.21	4276.01	4436.68
16	9402.86	11297.99	2947.25	2601.16	4282.16	4426.25
17	11020.39	11367.36	3250.30	2588.39	4630.43	4415.95
18	9448.76	11436.21	3114.65	2575.92	4359.67	4405.78
19	10076.97	11504.56	3482.35	2563.74	4442.53	4395.73
20	9624.49	11572.41	3186.16	2551.84	4147.80	4385.81
21	10765.26	11639.77	2664.91	2540.21	4108.98	4376.01
22	8872.89	11706.65	3151.39	2528.84	5342.83	4366.33
23	9068.17	11773.06	2937.90	2517.75	5096.37	4356.77
24	8657.62	11838.99	3100.07	2506.92	4696.44	4347.33
25	8959.80	11904.47	2949.49	2496.35	4472.29	4338.00
26	8129.95	11969.49	2781.38	2486.03	4763.86	4328.78
27	8311.97	12034.06	2632.41	2475.95	4547.95	4319.67
28	8679.57	12098.20	2833.68	2466.12	4038.59	4310.67
29	11378.96	12161.90	2918.07	2456.52	5035.81	4301.78
30	9959.44	12225.17	3015.53	2447.16	4614.79	4292.99
31	11240.20	12288.02	2874.50	2438.03	4991.63	4284.31
32	9720.70	12350.45	3055.68	2429.13	5539.42	4275.73
33	8695.67	12412.47	3458.79	2420.44	5705.66	4267.25
34	8512.24	12474.08	3380.13	2411.98	5942.06	4258.87
35	9244.85	12535.30	2583.60	2403.73	5235.02	4250.58
36	9808.03	12596.12	3150.20	2395.70	4779.70	4242.39
37	9592.28	12656.56	3069.47	2387.87	4423.78	4234.30
38	7968.94	12716.61	3092.57	2380.26	4968.50	4226.30
39	9355.23	12776.28	2723.06	2372.85	4780.61	4218.39
40	9340.15	12835.58	2472.68	2365.64	4274.58	4210.57
41	11309.68	12894.51	2863.23	2358.63	5523.59	4202.84
42	9931.83	12953.07	2774.04	2351.82	5477.75	4195.20
43	9802.43	13011.27	3364.24	2345.19	5770.56	4187.64
44	10109.21	13069.11	2876.03	2338.75	5909.92	4180.17
45	9321.18	13126.60	3207.77	2332.50	6308.80	4172.78
46	8884.58	13183.74	3400.04	2326.43	6211.10	4165.48

อ่านต่อหน้าถัดไป...

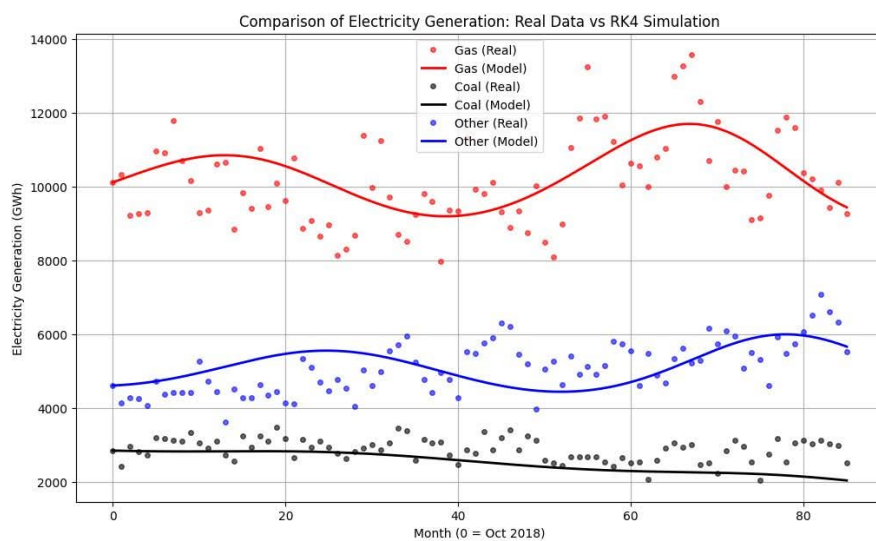
ตารางที่ 2 (ต่อ)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
47	9340.17	13240.54	2864.00	2320.54	5449.80	4158.26
48	8740.23	13297.00	3247.58	2314.82	5207.26	4151.13
49	10024.15	13353.13	3134.84	2309.28	3986.37	4144.07
50	8477.97	13408.93	2595.20	2303.90	5046.31	4137.10
51	8084.16	13464.41	2513.35	2298.69	5258.54	4130.20
52	8987.37	13519.57	2458.19	2293.65	4630.38	4123.38
53	11056.52	13574.41	2671.15	2288.77	5400.85	4116.64
54	11863.01	13628.93	2686.22	2284.05	4918.32	4109.97
55	13234.88	13683.14	2681.38	2279.49	5117.90	4103.38
56	11834.39	13737.05	2673.46	2275.08	4909.21	4096.86
57	11895.35	13790.65	2536.84	2270.82	5139.90	4090.41
58	11213.66	13843.95	2413.01	2266.71	5797.97	4084.04
59	10031.42	13896.95	2662.88	2262.74	5730.97	4077.74
60	10633.49	13949.66	2508.12	2258.93	5560.95	4071.50
61	10569.07	14002.08	2552.01	2255.26	4615.85	4065.34
62	9998.68	14054.21	2076.14	2251.73	5479.73	4059.24
63	10801.56	14106.05	2596.18	2248.33	4901.51	4053.21
64	11020.98	14157.62	2926.92	2245.08	4675.28	4047.25
65	12990.41	14208.90	3056.24	2241.96	5350.49	4041.36
66	13252.44	14259.91	2949.05	2238.97	5631.73	4035.53
67	13563.09	14310.65	3012.51	2236.12	5214.05	4029.77
68	12301.86	14361.11	2478.96	2233.40	5296.95	4024.07
69	10711.37	14411.31	2516.49	2230.80	6163.48	4018.43
70	11766.21	14461.24	2245.78	2228.34	5746.40	4012.86
71	10001.28	14510.92	2845.61	2226.00	6097.86	4007.35
72	10443.26	14560.33	3131.78	2223.79	5946.31	4001.90
73	10408.05	14609.49	2959.84	2221.70	5075.70	3996.51
74	9112.36	14658.40	2540.11	2219.74	5503.94	3991.19
75	9140.70	14707.06	2051.30	2217.90	5309.90	3985.92
76	9756.00	14755.48	2762.70	2216.18	4605.90	3980.71
77	11530.90	14803.65	3183.30	2214.59	5921.50	3975.56
78	11877.50	14851.58	2551.10	2213.11	5476.50	3970.47
79	11604.00	14899.28	3067.70	2211.75	5742.90	3965.44
80	10362.90	14946.74	3122.30	2210.51	6060.20	3960.47
81	10214.60	14993.97	3034.90	2209.39	6508.80	3955.55
82	9900.30	15040.97	3118.90	2208.38	7076.10	3950.69

อ่านต่อหน้าถัดไป...

ตารางที่ 2 (ต่อ)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
83	9427.90	15087.75	3037.90	2207.49	6606.00	3945.89
84	10120.20	15134.31	2998.40	2206.71	6318.90	3941.14
85	9276.90	15180.65	2525.20	2206.04	5538.10	3936.45



รูปที่ 1: กราฟที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลจริงและค่าประมาณจากแบบจำลองปริมาณการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน ด้วยวิธีเชิงอินทิกรัล ระยะเวลา 7 ปี 2 เดือน

การวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลอง (Integral Method) [4]

จากการคำนวณข้อมูลในตารางข้างต้น สามารถประเมินความแม่นยำของแบบจำลองได้ดังนี้

- **Gas (x):** MAPE = 9.09%, MAE = 905.76 GWh , RMSE = 1085.18 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองปริมาณก๊าซได้อย่างแม่นยำมาก โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเพียง 9.09%
- **Coal (y):** MAPE = 13.17%, MAE = 391.77 GWh , RMSE = 480.86 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองปริมาณถ่านหินได้ในระดับที่ยอมรับได้
- **Other (z):** MAPE = 12.37%, MAE = 613.26 GWh , RMSE = 735.70 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองพลังงานประเภทอื่น ๆ ได้ในระดับที่ยอมรับได้เช่นกัน

3.2 ชุดพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method)

จากชุดพารามิเตอร์ที่คำนวณได้จากวิธีลอการิทึมในขั้นตอนที่ 2 สามารถนำมาสร้างระบบสมการลดทอ-โวลเทอรร่า ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = 0.124023x + 0.000002x^2 - 0.000014xy - 0.000020xz \quad (4.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.049413y + 0.000007y^2 + 0.000003yx - 0.000001yz \quad (4.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.103348z - 0.000002z^2 + 0.000012zx - 0.000002zy \quad (4.6)$$

เมื่อนำสมการดังกล่าวไปหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (RK4) เพื่อเปรียบเทียบข้อมูลจริง จะได้ผลลัพธ์ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3: เปรียบเทียบปริมาณการผลิตไฟฟ้าจริงและค่าประมาณจากแบบจำลองด้วยวิธี RK4 [3] ระยะเวลา 7 ปี 2 เดือน ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2561 (เดือนที่ 0) ถึง พฤศจิกายน พ.ศ. 2568 (เดือนที่ 85)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
0	10112.57	10112.57	2849.82	2849.82	4610.84	4610.84
1	10332.75	10203.05	2428.71	2846.34	4142.55	4627.24
2	9222.76	10292.39	2953.02	2843.56	4286.13	4648.66
3	9268.11	10379.40	2817.73	2841.47	4267.94	4675.00
4	9287.21	10462.85	2733.24	2840.04	4078.04	4706.11
5	10952.87	10541.50	3196.02	2839.24	4722.22	4741.77
6	10900.06	10614.12	3167.24	2839.02	4366.32	4781.72
7	11788.13	10679.50	3120.05	2839.32	4410.51	4825.59
8	10707.57	10736.51	3099.32	2840.07	4419.58	4872.99
9	10164.99	10784.09	3338.72	2841.20	4420.82	4923.41
10	9293.48	10821.29	3051.52	2842.60	5261.89	4976.30
11	9352.44	10847.32	2923.65	2844.20	4734.44	5031.04
12	10614.26	10861.55	3101.23	2845.87	4445.85	5086.92
13	10660.78	10863.56	2719.38	2847.52	3623.46	5143.20
14	8850.72	10853.14	2557.12	2849.03	4507.97	5199.10
15	9831.99	10830.30	3257.31	2850.29	4276.01	5253.79
16	9402.86	10795.30	2947.25	2851.18	4282.16	5306.46
17	11020.39	10748.65	3250.30	2851.60	4630.43	5356.27
18	9448.76	10691.08	3114.65	2851.43	4359.67	5402.44

อ่านต่อหน้าถัดไป...

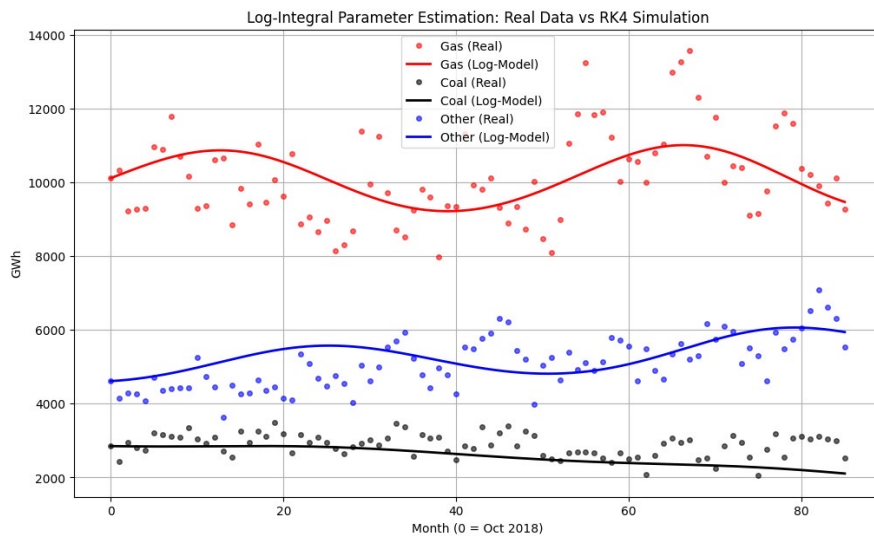
ตารางที่ 3 (ต่อ)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
19	10076.97	10623.51	3482.35	2850.59	4442.53	5444.23
20	9624.49	10547.09	3186.16	2848.98	4147.80	5480.96
21	10765.26	10463.11	2664.91	2846.52	4108.98	5512.06
22	8872.89	10372.97	3151.39	2843.16	5342.83	5537.05
23	9068.17	10278.18	2937.90	2838.85	5096.37	5555.58
24	8657.62	10180.29	3100.07	2833.55	4696.44	5567.42
25	8959.80	10080.87	2949.49	2827.24	4472.29	5572.46
26	8129.95	9981.44	2781.38	2819.92	4763.86	5570.76
27	8311.97	9883.49	2632.41	2811.60	4547.95	5562.47
28	8679.57	9788.41	2833.68	2802.31	4038.59	5547.86
29	11378.96	9697.52	2918.07	2792.07	5035.81	5527.33
30	9959.44	9612.00	3015.53	2780.94	4614.79	5501.35
31	11240.20	9532.89	2874.50	2768.98	4991.63	5470.49
32	9720.70	9461.13	3055.68	2756.25	5539.42	5435.34
33	8695.67	9397.51	3458.79	2742.82	5705.66	5396.59
34	8512.24	9342.69	3380.13	2728.78	5942.06	5354.90
35	9244.85	9297.21	2583.60	2714.21	5235.02	5311.01
36	9808.03	9261.48	3150.20	2699.18	4779.70	5265.60
37	9592.28	9235.79	3069.47	2683.80	4423.78	5219.38
38	7968.94	9220.36	3092.57	2668.14	4968.50	5173.03
39	9355.23	9215.25	2723.06	2652.30	4780.61	5127.22
40	9340.15	9220.48	2472.68	2636.36	4274.58	5082.58
41	11309.68	9235.95	2863.23	2620.40	5523.59	5039.69
42	9931.83	9261.48	2774.04	2604.50	5477.75	4999.13
43	9802.43	9296.81	3364.24	2588.75	5770.56	4961.41
44	10109.21	9341.60	2876.03	2573.22	5909.92	4927.02
45	9321.18	9395.44	3207.77	2557.97	6308.80	4896.41
46	8884.58	9457.80	3400.04	2543.07	6211.10	4869.98
47	9340.17	9528.11	2864.00	2528.57	5449.80	4848.09
48	8740.23	9605.70	3247.58	2514.54	5207.26	4831.09
49	10024.15	9689.81	3134.84	2501.00	3986.37	4819.27
50	8477.97	9779.59	2595.20	2488.02	5046.31	4812.88
51	8084.16	9874.10	2513.35	2475.60	5258.54	4812.13
52	8987.37	9972.31	2458.19	2463.79	4630.38	4817.19
53	11056.52	10073.10	2671.15	2452.59	5400.85	4828.21
54	11863.01	10175.27	2686.22	2442.00	4918.32	4845.24

อ่านต่อหน้าถัดไป...

ตารางที่ 3 (ต่อ)

เดือนที่	ก๊าซธรรมชาติ (GWh)		ถ่านหิน (GWh)		พลังงานทดแทน (GWh)	
	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4	ข้อมูลจริง	RK4
55	13234.88	10277.52	2681.38	2432.03	5117.90	4868.34
56	11834.39	10378.50	2673.46	2422.66	4909.21	4897.45
57	11895.35	10476.77	2536.84	2413.87	5139.90	4932.50
58	11213.66	10570.87	2413.01	2405.62	5797.97	4973.31
59	10031.42	10659.32	2662.88	2397.87	5730.97	5019.65
60	10633.49	10740.63	2508.12	2390.56	5560.95	5071.20
61	10569.07	10813.35	2552.01	2383.63	4615.85	5127.53
62	9998.68	10876.11	2076.14	2377.00	5479.73	5188.15
63	10801.56	10927.64	2596.18	2370.58	4901.51	5252.44
64	11020.98	10966.82	2926.92	2364.28	4675.28	5319.72
65	12990.41	10992.70	3056.24	2358.00	5350.49	5389.19
66	13252.44	11004.58	2949.05	2351.64	5631.73	5459.96
67	13563.09	11001.99	3012.51	2345.08	5214.05	5531.10
68	12301.86	10984.76	2478.96	2338.22	5296.95	5601.58
69	10711.37	10953.01	2516.49	2330.95	6163.48	5670.37
70	11766.21	10907.17	2245.78	2323.16	5746.40	5736.41
71	10001.28	10847.97	2845.61	2314.75	6097.86	5798.66
72	10443.26	10776.42	3131.78	2305.65	5946.31	5856.11
73	10408.05	10693.81	2959.84	2295.76	5075.70	5907.86
74	9112.36	10601.63	2540.11	2285.02	5503.94	5953.08
75	9140.70	10501.56	2051.30	2273.39	5309.90	5991.09
76	9756.00	10395.40	2762.70	2260.82	4605.90	6021.36
77	11530.90	10285.02	3183.30	2247.30	5921.50	6043.50
78	11877.50	10172.34	2551.10	2232.82	5476.50	6057.34
79	11604.00	10059.24	3067.70	2217.39	5742.90	6062.83
80	10362.90	9947.52	3122.30	2201.03	6060.20	6060.15
81	10214.60	9838.91	3034.90	2183.79	6508.80	6049.59
82	9900.30	9734.98	3118.90	2165.71	7076.10	6031.61
83	9427.90	9637.18	3037.90	2146.86	6606.00	6006.80
84	10120.20	9546.76	2998.40	2127.31	6318.90	5975.84
85	9276.90	9464.84	2525.20	2107.12	5538.10	5939.52



รูปที่ 2: กราฟที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลจริงและค่าประมาณจากแบบจำลองปริมาณการผลิตพลังงานไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน ด้วยวิธีเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึมระยะเวลา 7 ปี 2 เดือน

การวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลอง(Logarithmic Integral Method)[4] จากการคำนวณข้อมูลในตารางข้างต้น สามารถประเมินความแม่นยำของแบบจำลองได้ดังนี้

- **Gas (x):** MAPE = 8.84%, MAE = 894.01 GWh , RMSE = 1109.39 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองปริมาณก๊าซได้อย่างแม่นยำมาก โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เฉลี่ย (MAPE) เพียง 8.84% ซึ่งถือว่าอยู่ในระดับดีมาก แม้ว่าค่า RMSE จะมีค่าค่อนข้างสูงเมื่อพิจารณาในเชิงปริมาณ แต่เนื่องจากข้อมูลมีขนาดใหญ่ จึงถือว่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในระดับที่ยอมรับได้
- **Coal (y):** MAPE = 11.87%, MAE = 353.80 GWh , RMSE = 441.48 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองปริมาณถ่านหินได้ในระดับที่ยอมรับได้ โดยมีค่า MAPE เท่ากับ 11.87% แสดงให้เห็นว่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยอยู่ในช่วงประมาณร้อยละ 10–15 ซึ่งยังคงสะท้อนแนวโน้มของข้อมูลได้ค่อนข้างดี
- **Other (z):** MAPE = 11.57%, MAE = 561.13 GWh , RMSE = 677.50 GWh
แบบจำลองสามารถจำลองพลังงานประเภทอื่น ๆ ได้ในระดับที่ยอมรับได้เช่นกัน โดยมีค่า MAPE เท่ากับ 11.57% แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองสามารถอธิบายแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลได้ดี แม้จะมีความคลาดเคลื่อนในบางช่วงเวลา

สรุปผลการเปรียบเทียบความแม่นยำ

จากการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนจากชุดพารามิเตอร์ทั้งสองวิธี จะเห็นได้ว่าชุดพารามิเตอร์ที่ประมาณค่าได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method) ให้ความแม่นยำในการจำลองที่สูงกว่าและมีค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่ำกว่า ดังนั้นโครงการฉบับนี้จึงเลือกใช้ชุดพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการแข่งขันและเสถียรภาพของระบบในขั้นถัดไป

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ [5]

จากการเลือกใช้ชุดพารามิเตอร์ของวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method) สามารถนำมาหาจุดสมดุลและวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบได้ดังนี้

ณ จุดสมดุล ($x = 9969.47, y = 3134.61, z = 4851.39$) ได้ค่าลักษณะเฉพาะเป็น

$$\lambda_1 = 0.0021 + 0.1138i$$

$$\lambda_2 = 0.0021 - 0.1138i$$

$$\lambda_3 = 0.0218$$

เนื่องจากส่วนจริงของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดเป็นบวก จึงสรุปได้ว่าจุดสมดุลเป็น **จุดที่ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable Equilibrium)** ซึ่งค่าพิกัดจุดสมดุล สภาวะการขาดเสถียรภาพ และค่าส่วนจินตภาพของลักษณะเฉพาะที่คำนวณได้เหล่านี้ จะถูกนำไปใช้วิเคราะห์เชิงลึกในบทถัดไป เพื่ออธิบายถึงพลวัตการแข่งขันทางพลังงาน การประเมินคาบเวลา (Period) การปรับตัวของระบบ และผลกระทบเชิงนโยบายต่อโครงสร้างการผลิตไฟฟ้าของประเทศไทย

4 การวิเคราะห์การแข่งขัน

จากการวิเคราะห์ข้อมูลในบทก่อนหน้านี้ เราได้ชุดพารามิเตอร์คือ

<i>Natural Gas</i>	$a_1 = 0.124023$	$b_1 = 0.000002$	$c_1 = -0.000014$	$d_1 = -0.000020$
<i>Coal Lignite</i>	$a_2 = -0.049413$	$b_2 = 0.000007$	$c_2 = 0.000003$	$d_2 = -0.000001$
<i>Other</i>	$a_3 = -0.103348$	$b_3 = -0.000002$	$c_3 = 0.000012$	$d_3 = -0.000002$

และได้ตัวแบบที่เป็นตัวแทนของข้อมูลคือ (Lotka-Volterra model)

$$\frac{dx}{dt} = 0.124023x + 0.000002x^2 - 0.000014xy - 0.000020xz \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.049413y + 0.000007y^2 + 0.000003yx - 0.000001yz \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -0.103348z - 0.000002z^2 + 0.000012zx - 0.000002zy \quad (4.3)$$

4.1 การวิเคราะห์นัยสำคัญของพารามิเตอร์ (Parameter Significance)

ก่อนการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงระบบ จำเป็นต้องทำความเข้าใจนัยสำคัญของพารามิเตอร์รายตัวที่ส่งผลต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานแต่ละประเภท ดังนี้:

(a) ก๊าซธรรมชาติ (Natural Gas)

ก๊าซธรรมชาติเป็นเชื้อเพลิงหลักของไทยในปัจจุบัน พารามิเตอร์ของมันเป็นบอกลำโพงสถานะดังนี้:

- $a_1 = 0.124023$ (อัตราการเติบโตตามธรรมชาติ): มีค่าเป็นบวกและค่อนข้างสูง แสดงว่าถ้าไม่มีการขัดขวางจากเชื้อเพลิงอื่น ก๊าซธรรมชาติมีแนวโน้มจะขยายตัวเพิ่มขึ้นได้เองตามความต้องการใช้ไฟฟ้าที่โตขึ้น
- $b_1 = 0.000002$ (ผลกระทบจากตัวเอง): ค่าเป็นบวกเล็กน้อย (เกือบเป็นศูนย์) แสดงถึงการขยายตัวที่ค่อนข้างอิสระ แต่อาจเริ่มมีข้อจำกัดด้านทรัพยากรหรือโครงสร้างพื้นฐานของตัวเองบ้าง
- $c_1 = -0.000014$ (ผลกระทบจากถ่านหิน): ค่าเป็นลบ หมายความว่า ถ่านหินเป็นคู่แข่ง เมื่อสัดส่วนถ่านหินเพิ่มขึ้น จะไปดึงส่วนแบ่งหรือลดอัตราการเติบโตของก๊าซธรรมชาติลง
- $d_1 = -0.000020$ (ผลกระทบจากพลังงานอื่นๆ/ทดแทน): ค่าเป็นลบและมากกว่า c_1 หมายความว่า พลังงานทดแทนเป็นคู่แข่งที่น่ากลัวกว่าถ่านหิน สำหรับก๊าซธรรมชาติในขณะนี้

(b) ถ่านหินลิกไนต์ (Coal Lignite)

ถ่านหินมักถูกจำกัดด้วยนโยบายสิ่งแวดล้อม ซึ่งสะท้อนผ่านตัวเลขดังนี้:

- $a_2 = -0.049413$ (อัตราการเติบโตตามธรรมชาติ): ค่าเป็นติดลบ ชี้ให้เห็นว่าหากปล่อยไว้ตามลำพังโดยไม่มีปัจจัยหนุน สัดส่วนถ่านหินในระบบจะค่อยๆ ลดลงเอง (อาจเนื่องมาจากโรงไฟฟ้าเก่าหมดอายุ หรือนโยบายลดคาร์บอน)
- $b_2 = 0.000007$ (ผลกระทบจากตัวเอง): มีการประคองตัวในระดับต่ำ
- $c_2 = 0.000003$ (ผลกระทบจากก๊าซธรรมชาติ): ค่าเป็นบวกเล็กน้อย แสดงถึงความสัมพันธ์แบบพึ่งพาหรือเติบโตไปพร้อมกับก๊าซในบางจังหวัด แต่อยู่ในระดับที่น้อยมาก
- $d_2 = -0.000001$ (ผลกระทบจากพลังงานอื่นๆ): มีผลกระทบเชิงลบจากพลังงานทดแทนเพียงเล็กน้อย

(c) พลังงานทดแทนและอื่นๆ (Other)

นี่คือกลุ่มที่กำลังเป็นเทรนด์ใหม่ในแผนพัฒนากำลังผลิตไฟฟ้า (PDP):

- $a_3 = -0.103348$ (อัตราการเติบโตตามธรรมชาติ): ค่าติดลบค่อนข้างมาก อาจตีความได้ว่าพลังงานกลุ่มนี้ยังไม่สามารถเติบโตได้อย่างมั่นคงด้วยตัวเอง (Intrinsic growth) ต้องอาศัยกลไกสนับสนุนหรือปัจจัยภายนอก
- $b_3 = -0.000002$ (ผลกระทบจากตัวเอง): มีความไวต่อปริมาณตัวเอง
- $c_3 = 0.000012$ (ผลกระทบจากก๊าซธรรมชาติ): ค่าเป็นบวก หมายความว่า ก๊าซธรรมชาติช่วยส่งเสริมพลังงานทดแทน (ในทางเทคนิค ก๊าซธรรมชาติมักใช้เป็นโรงไฟฟ้าสำรองเพื่อเสริมความมั่นคงให้พลังงานหมุนเวียนที่ไม่เสถียร)
- $d_3 = -0.000002$ (ผลกระทบจากถ่านหิน): มีผลกระทบเชิงลบจากถ่านหินเล็กน้อย

ตารางที่ 3 สรุปรูปแบบความสัมพันธ์ทางการแข่งขันระหว่าง Gas (x), Coal (y) และ Other (z) ตามพารามิเตอร์ของ (c_1, c_2), (d_1, c_3), และ (d_2, d_3)

c_1 — d_1 — d_2	c_2 — c_3 — d_3	รูปแบบความสัมพันธ์
<i>Gas</i> (−0.000014) (−)	<i>Coal</i> (0.000003) (+)	ผู้ล่า –เหยื่อ (Predator–prey)
<i>Gas</i> (−0.000020) (−)	<i>Other</i> (0.000012) (+)	ผู้ล่า –เหยื่อ (Predator–prey)
<i>Coal</i> (−0.000001) (−)	<i>Other</i> (−0.000002) (−)	การแข่งขัน (Competition)

จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ข้างต้น พบว่าสัดส่วนการผลิตไฟฟ้าจากก๊าซธรรมชาติ (x), ถ่านหิน (y) และพลังงานอื่นๆ (z) มีลักษณะการปฏิสัมพันธ์เชิงระบบที่ต้องพิจารณาเพื่อความมั่นคงในการผลิตไฟฟ้า สำหรับก๊าซธรรมชาติ การลดลงของสัดส่วนการผลิตเกิดจากปัจจัยการแทนที่ทางโครงสร้างจากทั้งถ่านหินและพลังงานอื่นๆ ซึ่งสะท้อนถึงความจำเป็นในการบริหารจัดการระบบส่งและโครงสร้างพื้นฐานเพื่อรักษาเสถียรภาพของสัดส่วนการผลิตหลัก

ในขณะที่ถ่านหินมีแนวโน้มได้รับผลเชิงบวกจากการมีปฏิสัมพันธ์เชิงแข่งขันกับก๊าซธรรมชาติ แต่ยังคงได้รับผลกระทบทางอ้อมจากสัดส่วนพลังงานอื่นๆ ที่เพิ่มขึ้น จึงควรพิจารณาการประยุกต์ใช้เทคโนโลยีที่เพิ่มประสิทธิภาพการผลิตเพื่อรักษาคุณภาพในระบบ สำหรับพลังงานอื่นๆ แม้จะมีอัตราการขยายตัวสูงจากการเข้ามาแทนที่ก๊าซธรรมชาติ แต่ยังคงเผชิญข้อจำกัดเชิงโครงสร้างเมื่อต้องจัดสรรพื้นที่ผลิตร่วมกับถ่านหิน จึงจำเป็นต้องพัฒนาระบบกักเก็บหรือความเสถียรของแหล่งกำเนิดเพื่อลดผลกระทบเชิงลบจากปัจจัยดังกล่าว ทั้งนี้ได้นำแบบจำลองที่ได้มาวิเคราะห์ค่าจุดสมดุล (Equilibrium) และวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ ดังนี้:

- **จุดสมดุล (Equilibrium Point):** หมายถึง สภาวะที่ระบบไม่มีการเปลี่ยนแปลงทางปริมาณ หรือจุดที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของทุกปัจจัยในระบบมีค่าเป็นศูนย์ ($\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$) ซึ่งคือสภาวะที่สัดส่วนการผลิตไฟฟ้าจากแต่ละแหล่งพลังงานมีความคงตัวในระยะยาว โดยจากผลการคำนวณในแบบจำลองนี้ ได้ค่าจุดสมดุล (x^*, y^*, z^*) คือ:

$$(x^*, y^*, z^*) = (9969.47, 3134.61, 4851.39)$$

ค่าเหล่านี้ใช้เป็นดัชนีชี้วัดสัดส่วนการผสมผสานพลังงาน (Energy Mix) ในอุดมคติที่ระบบจะเข้าสู่สภาวะคงที่

- **การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ (Stability Analysis):** การวิเคราะห์นี้มุ่งเน้นเพื่อพิจารณาความสามารถของระบบในการกลับคืนสู่สภาวะสมดุล (Robustness) โดยจากการวิเคราะห์ค่าเฉพาะ (Eigenvalues) พบว่า:

$$\lambda_{1,2} = 0.0021 \pm 0.1138i, \quad \lambda_3 = 0.0218$$

จากการพิจารณาส่วนจริง (Real Part) ของค่าเฉพาะ พบว่ามีค่าเป็นบวกทั้งหมด ($Re(\lambda) > 0$) แสดงว่าระบบนี้ **ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable)**

- **การวิเคราะห์ผลจากจุดสมดุล:** เมื่อระบบถูกรบกวนจากปัจจัยภายนอก (Exogenous Shocks) กลไกปฏิสัมพันธ์ภายในแบบจำลองจะส่งผลให้สัดส่วนการผลิตของก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน **ลู่ออก (Diverge)** จากจุดสมดุลเดิม โดยมีลักษณะการกวัดแกว่งแบบวนออก (Unstable Spiral) เนื่องจากมีค่าจินตภาพในตัวแปร λ สิ่งนี้สะท้อนว่าโครงสร้างระบบการผลิตไฟฟ้าในปัจจุบันมีความเปราะบางสูง และไม่สามารถกลับเข้าสู่จุดดุลยภาพของ Energy Mix ได้เองโดยธรรมชาติหากเกิดความผันผวนในระบบ

4.2 การวิเคราะห์ผล

จากการวิเคราะห์พารามิเตอร์ พบว่าระบบพลังงานทั้ง 3 ประเภทอยู่ในสถานการณ์ที่ต้องปรับกลยุทธ์อย่างมีนัยสำคัญ โดยมีรายละเอียดดังนี้:

- **ก๊าซธรรมชาติ (x):** เผชิญภาวะกดดันเชิงโครงสร้างจากการขยายตัวของทั้งถ่านหิน และพลังงานทดแทน โดยจากการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ปฏิสัมพันธ์ทั้งหมด พบว่าค่า $|d_1| = 0.000020$ มีขนาดสัมบูรณ์สูงที่สุดในระบบ ซึ่งบ่งชี้ว่าก๊าซธรรมชาติมีความอ่อนไหวต่อการเพิ่มขึ้นของสัดส่วนพลังงานทดแทน (Other) อย่างมีนัยสำคัญ โดยผลกระทบจากการแทนที่ด้วยพลังงานทดแทนนั้นรุนแรงกว่าการแทนที่ด้วยถ่านหินถึง 1.4 เท่า ส่งผลให้ก๊าซธรรมชาติจำเป็นต้องปรับบทบาทจากการเป็นแหล่งพลังงานหลัก (Base Load) มาเป็นแหล่งพลังงานสำรองที่มีความยืดหยุ่น (Flexible Generation) เพื่อรักษาเสถียรภาพของระบบในภาพรวม

- **ถ่านหิน (y):** แม้จะมีปฏิสัมพันธ์ในลักษณะการแทนที่ (Displacement) ต่อก๊าซธรรมชาติ แต่กำลังเผชิญข้อจำกัดเชิงนโยบายและสถานะการขยายตัวที่ยากลำบากเมื่อเทียบกับพลังงานทดแทน การรักษาเสถียรภาพของสัดส่วนถ่านหินในระบบการผลิตไฟฟ้าทำได้ยากขึ้น เนื่องจากแรงกดดันด้านสิ่งแวดล้อมที่สะท้อนผ่านค่าพารามิเตอร์การเติบโตตามธรรมชาติ (a_2) ที่มีค่าติดลบ ซึ่งบ่งชี้ถึงแนวโน้มการลดบทบาทลงในระยะยาวตามแผนพัฒนากำลังผลิตไฟฟ้า
- **พลังงานทดแทน (z):** มีศักยภาพในการขยายตัวเพื่อเข้าแทนที่ก๊าซธรรมชาติสูงสุดที่สอดคล้องกับค่า $c_3 = +0.000012$ ที่แสดงถึงประสิทธิภาพในการดัดแปลงการผลิตมาจากก๊าซธรรมชาติ (มีประสิทธิภาพสูงกว่าศักยภาพการแทนที่ของถ่านหินถึง 4 เท่า) อย่างไรก็ตาม การจะขยายสัดส่วนเพื่อทดแทนถ่านหินยังคงมีอุปสรรคเชิงโครงสร้างและการจัดสรรระบบส่ง สะท้อนผ่านค่าพารามิเตอร์ปฏิสัมพันธ์ d_3 ที่ยังคงเป็นลบ ซึ่งหมายความว่า การเพิ่มขึ้นของถ่านหินยังคงส่งผลจำกัดการเติบโตของพลังงานทดแทนในบางมิติ

บทสรุปเชิงระบบและการวิเคราะห์จุดสมดุล

จากการนำชุดพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method) ซึ่งเป็นชุดที่ให้ความแม่นยำสูงกว่า มาคำนวณหาจุดสมดุลของระบบพลวัต (x^*, y^*, z^*) พบว่าระบบมีจุดสมดุลทางทฤษฎีอยู่ที่

- ก๊าซธรรมชาติ (x^*) = 9,969.47 GWh
- ถ่านหิน (y^*) = 3,134.61 GWh
- พลังงานทดแทน (z^*) = 4,851.39 GWh

การแปลผลจากค่าจุดสมดุล: ค่าจุดสมดุลข้างต้นสะท้อนให้เห็นถึงเพดานการเติบโตและข้อจำกัดเชิงโครงสร้างของระบบไฟฟ้าไทย หากปล่อยให้การแข่งขันดำเนินไปตามกลไกปัจจุบัน โดยไม่มีการแทรกแซง ก๊าซธรรมชาติจะยังคงเป็นแหล่งพลังงานหลักแต่จะมีสัดส่วนที่ลดลงมาทรงตัวอยู่ที่ระดับประมาณ 9,900 GWh ในขณะที่พลังงานทดแทนสามารถเติบโตขึ้นมาครองสัดส่วนเป็นอันดับสองที่ระดับประมาณ 4,850 GWh ซึ่งสูงกว่าถ่านหินอย่างชัดเจน ตัวเลขนี้ยืนยันถึงขีดความสามารถของพลังงานทดแทนในการเข้ามาแย่งชิงสัดส่วนการผลิตจากเชื้อเพลิงฟอสซิลได้อย่างมีนัยสำคัญ

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ (Stability Analysis): เมื่อนำจุดสมดุลดังกล่าวมาตรวจสอบพฤติกรรมของระบบในระยะยาวผ่านการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues) จากเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) ได้ผลลัพธ์ดังนี้:

$$\lambda_1 = 0.0021 + 0.1138i$$

$$\lambda_2 = 0.0021 - 0.1138i$$

$$\lambda_3 = 0.0218$$

จากการคำนวณพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริง (Real part) เป็นบวกทั้งหมด ตามทฤษฎีระบบพลวัตจึงสรุปได้อย่างชัดเจนว่า จุดสมดุลนี้เป็น **จุดที่ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable Equilibrium)**

ความหมายเชิงนโยบายและพลวัตการแข่งขัน: การที่ระบบไม่มีเสถียรภาพ บ่งชี้ว่าโครงสร้างการผลิตไฟฟ้าของประเทศไทยในปัจจุบัน **จะไม่อยู่ในจุดสมดุลที่นิ่งสงบ** สัดส่วนการผลิตจะไม่หยุดนิ่งอยู่ที่ตัวเลข 9,969 : 3,134 : 4,851 GWh ตลอดไป แต่จะเกิดการเบี่ยงเบนและแกว่งตัวออกจากจุดนี้อย่างต่อเนื่อง (Spiral out) สิ่งนี้อธิบายได้ด้วยความเป็นจริงทางเศรษฐศาสตร์และนโยบายพลังงาน (Energy Transition) ที่มีการตื่นตัวอยู่ตลอดเวลา หากมีปัจจัยแวดล้อมภายนอกเข้ามากระทบเพียงเล็กน้อย เช่น ความผันผวนของราคาก๊าซธรรมชาติเหลว (LNG) ในตลาดโลก การกำหนดนโยบายภาษีคาร์บอน (Carbon Tax) ที่กีดกันการใช้ถ่านหิน หรือการอุดหนุนเทคโนโลยีแบตเตอรี่กักเก็บพลังงานที่ทำให้พลังงานทดแทนมีเสถียรภาพมากขึ้น กลไกเหล่านี้จะกระตุ้นให้เกิดการแย่งชิงสัดส่วนการผลิตรอบใหม่ทันที

นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาค่าส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ของค่าลักษณะเฉพาะเชิงซ้อนซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1138 สามารถนำมาคำนวณหา **คาบเวลา (Period)** ของการแกว่งตัวของระบบได้จากสมการ

$$T = \frac{2\pi}{|\text{Im}(\lambda)|}$$

ซึ่งจะได้คาบเวลาเท่ากับ $\frac{2\pi}{0.1138} \approx 55.21$ เดือน (หรือประมาณ 4.6 ปี)

การแปลผลจากคาบเวลา: คาบเวลา 55.21 เดือน (ประมาณ 4.6 ปี) สะท้อนถึง "วัฏจักรการปรับตัวเชิงโครงสร้าง" ของระบบการผลิตไฟฟ้าในประเทศไทย ซึ่งระยะเวลาดังกล่าว ยืนยันความสอดคล้องกับวงจรการทบทวนและปรับปรุงแผนพัฒนากำลังผลิตไฟฟ้าของประเทศไทย (Power Development Plan: PDP) ที่มักจะถูกปรับแก้ในทุก ๆ 3-5 ปี รวมถึงเป็นระยะเวลาที่สอดคล้องกับรอบการประมูลโครงสร้างพื้นฐานและการก่อสร้างโรงไฟฟ้าพลังงานหมุนเวียนแห่งใหม่ สิ่งนี้บ่งชี้สถานะความเป็นจริงของระบบว่า เมื่อมีการประกาศใช้นโยบายพลังงานฉบับใหม่หรือมีเทคโนโลยีใหม่เข้าสู่ตลาด สัดส่วนการผลิตของเชื้อเพลิงทั้ง 3 ชนิดจะใช้เวลาประมาณ 4 ปีครึ่งในการแข่งขันและปรับตัวเข้าหากันจนสุดวงจรรอบ ก่อนที่จะถูกกระตุ้นให้เกิดการแย่งชิงสัดส่วนระลอกใหม่ตามแผนนโยบายพลังงานในระยะถัดไป

4.3 ข้อเสนอแนะเชิงนโยบายและการปรับเปลี่ยนสัดส่วนพลังงาน

เพื่อให้บรรลุเป้าหมายการลดการใช้ถ่านหิน (Coal) และส่งเสริมพลังงานทดแทน (Other) อย่างยั่งยืนตามนัยสำคัญของพารามิเตอร์ d_2 และ d_3 มีแนวทางดังนี้:

1. **การบริหารจัดการการเปลี่ยนผ่านเชิงโครงสร้าง (Structural Transition Management):** มุ่งเน้นการลดอุปสรรคเชิงระบบที่จำกัดการขยายตัวของพลังงานทดแทน เพื่อส่งเสริมให้พลังงานสะอาดสามารถเพิ่มสัดส่วนในระบบไฟฟ้าได้ตามศักยภาพ โดยพิจารณาการปรับปรุงประสิทธิภาพต้นทุน (Cost Efficiency) เพื่อเปลี่ยนสถานะปฏิสัมพันธ์เชิงลบระหว่างเชื้อเพลิงให้เข้าสู่สถานะสมดุลใหม่ที่ยั่งยืนขึ้น
2. **การรักษาเสถียรภาพของระบบสำรอง (Reserve Stability Control):** ควบคุมสมดุลระหว่างการขยายตัวของพลังงานทดแทน (Other) และการลดบทบาทของก๊าซธรรมชาติ (x) เพื่อป้องกันสถานะขาดเสถียรภาพของระบบ เนื่องจากผลการวิเคราะห์พบว่าพลังงานทดแทนมีอิทธิพลในการแทนที่ก๊าซธรรมชาติสูงกว่าถ่านหินอย่างมีนัยสำคัญ การปรับลดสัดส่วนก๊าซธรรมชาติจึงต้องสอดคล้องกับความสามารถในการพึ่งพาตนเองของพลังงานทดแทน
3. **แนวทางด้านเทคนิคและการจัดการระบบ (Technical and Systemic Approach):**
 - **การเสริมสร้างความมั่นคงในส่วนแหล่งพลังงานหลัก (Base Load Displacement):** ส่งเสริมพลังงานหมุนเวียนที่มีเสถียรภาพสูง เช่น พลังงานชีวมวล (Biomass) และพลังงานความร้อนใต้พิภพ (Geothermal) เพื่อทำหน้าที่ทดแทนสัดส่วนของถ่านหินที่มีแนวโน้มลดลงตามธรรมชาติ ($a_2 < 0$) ซึ่งจะช่วยรักษาความมั่นคงของระบบไฟฟ้า (Grid Firmness) โดยไม่เพิ่มการปลดปล่อยก๊าซเรือนกระจกในระยะยาว
 - **การเพิ่มความยืดหยุ่นด้วยระบบกักเก็บพลังงาน (Battery Energy Storage System - BESS):** ประยุกต์ใช้ระบบกักเก็บพลังงานเพื่อลดทอนความผันผวนและลดภาระการพึ่งพาก๊าซธรรมชาติในจังหวัดที่พลังงานหมุนเวียนไม่มีเสถียรภาพ การใช้ BESS จะช่วยลดความจำเป็นในการเดินเครื่องโรงไฟฟ้าก๊าซธรรมชาติที่มีต้นทุนเชื้อเพลิงผันผวนสูง ซึ่งเป็นการเพิ่มความคงทน (Resilience) ให้กับพารามิเตอร์ของระบบในภาพรวม
 - **การพัฒนาโครงข่ายไฟฟ้าอัจฉริยะ (Smart Grid Implementation):** พัฒนาโครงข่ายที่รองรับการบริหารจัดการพลังงานแบบกระจายศูนย์ (Distributed Energy Resources) เพื่อลดแรงเสียดทานเชิงโครงสร้างระหว่างผู้ผลิตไฟฟ้าหลักและผู้ผลิตรายย่อย ซึ่งจะช่วยเพิ่มความยืดหยุ่นในการจัดสรรกำลังผลิตและลดข้อจำกัดในการเข้าแทนที่ของพลังงานสะอาดในอนาคต

5 สรุปและอภิปรายผล

โครงการนี้ศึกษาการแข่งขันระหว่างแหล่งผลิตไฟฟ้า 3 ประเภทหลัก ได้แก่ ก๊าซธรรมชาติ ถ่านหิน และพลังงานทดแทน ในช่วงปี ค.ศ. 2018–2025 โดยใช้แบบจำลองลอตกา-โวลเทอร์ราแบบ 3 ตัวแปร (3-Species Lotka–Volterra Model) ซึ่งผลการศึกษามีดังนี้

ผลการวิเคราะห์เชิงปริมาณ

- **วิธีการที่เหมาะสมที่สุด:** จากการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ พบว่า *วิธีการเชิงอินทิกรัลแบบลอการิทึม (Logarithmic Integral Method)* ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ให้ความแม่นยำสูงกว่าวิธีเชิงอินทิกรัลแบบปกติ
- **ความสอดคล้องของแบบจำลอง (ประเมินด้วยค่า MAPE):** เมื่อนำพารามิเตอร์ที่ได้มาทดสอบความแม่นยำในการอธิบายข้อมูลจริง (Model Fitting) พบว่าแบบจำลองมีความสอดคล้องกับข้อมูลในระดับที่น่าพอใจดังนี้:
 - ก๊าซธรรมชาติ: มีความสอดคล้องสูงมาก โดยมีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เฉลี่ย 8.84
 - ถ่านหิน: มีความคลาดเคลื่อน 11.87
 - พลังงานทดแทน (Other): มีความคลาดเคลื่อน 11.57

ค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่ำนี้ยืนยันว่า แบบจำลองสามารถจับทิศทางและพลวัตการแข่งขันของระบบพลังงานในช่วงเวลาดังกล่าวได้ถูกต้อง

- **เสถียรภาพของระบบ:** จากการคำนวณเมทริกซ์จาโคเบียนเพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues) พบว่าจุดสมดุลของระบบเป็น **จุดที่ไม่มีเสถียรภาพ (Unstable Point)** ซึ่งผลลัพธ์นี้ไม่ได้ขัดแย้งกับความแม่นยำของแบบจำลองข้างต้น แต่เป็นสิ่งที่บ่งชี้ว่าระบบพลังงานของไทยกำลังอยู่ในช่วงการเปลี่ยนผ่าน (Energy Transition) ที่มีการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนอย่างรวดเร็ว ทำให้ระบบยังไม่เข้าสู่สภาวะหยุดนิ่งหรือจุดสมดุลถาวรในระยะยาว

การอภิปรายผลและรูปแบบการแข่งขัน เมื่อนำพารามิเตอร์ที่คำนวณได้มาวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงการแข่งขัน สามารถอภิปรายสถานการณ์ของเชื้อเพลิงแต่ละกลุ่มได้ดังนี้

- **ก๊าซธรรมชาติ:** อยู่ในภาวะถูกกดดันอย่างหนัก โดยมีสถานะเป็นเหยื่อ (Prey) ที่ถูกแย่งชิงสัดส่วนการผลิตจากทั้งถ่านหินและพลังงานทดแทน บ่งชี้ว่าในอนาคตก๊าซธรรมชาติต้องปรับบทบาทจากการเป็นแหล่งพลังงานหลัก (Base Load) ไปเป็นแหล่งพลังงานสำรองที่มีความยืดหยุ่น (Flexible Generation)
- **ถ่านหิน:** แม้จะมีข้อได้เปรียบจากการเป็นผู้ล่าเมื่อแข่งขันกับก๊าซธรรมชาติ แต่กำลังเผชิญการแข่งขันที่รุนแรงจากพลังงานทดแทน ทำให้การรักษาอัตราการเติบโตในระยะยาวทำได้ยากขึ้นภายใต้ข้อจำกัดด้านสิ่งแวดล้อม

- **พลังงานทดแทน:** เป็นกลุ่มที่มีศักยภาพในการขยายตัวสูงที่สุด และสามารถเข้าแทนที่ก๊าซธรรมชาติได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่การขยายตัวเพื่อเข้าแทนที่ถ่านหินอย่างสมบูรณ์ยังคงมีข้อจำกัดเชิงโครงสร้างของระบบสายส่ง

ข้อเสนอแนะเชิงนโยบาย เพื่อสนับสนุนการเปลี่ยนผ่านพลังงาน (Energy Transition) อย่างยั่งยืน และรักษาเสถียรภาพของระบบผลิตไฟฟ้า มีข้อเสนอแนะดังนี้

- **การลดอุปสรรคเชิงโครงสร้าง:** ควรสนับสนุนนโยบายที่ช่วยให้พลังงานทดแทนสามารถแข่งขันด้านต้นทุนได้ดีขึ้น เพื่อเปิดโอกาสในการเข้ามาทดแทนโรงไฟฟ้าถ่านหินอย่างเป็นระบบและเป็นรูปธรรม
- **การรักษาสมดุลของระบบสำรอง:** ต้องควบคุมจังหวะการขยายตัวของพลังงานทดแทนไม่ให้เข้ามาทดแทนสัดส่วนการผลิตของก๊าซธรรมชาติรวดเร็วเกินไป เนื่องจากระบบไฟฟ้ายังจำเป็นต้องพึ่งพาก๊าซธรรมชาติเป็นกำลังผลิตสำรอง (Backup Capacity) เพื่อรักษาความมั่นคงในช่วงที่พลังงานหมุนเวียนมีความผันผวน
- **การจัดการด้านเทคโนโลยีและโครงสร้างพื้นฐาน:**
 - ส่งเสริมการใช้พลังงานชีวมวลและพลังงานความร้อนใต้พิภพให้สามารถทำหน้าที่เป็นไฟฟ้าฐาน (Base Load) ทดแทนถ่านหิน เนื่องจากเป็นแหล่งพลังงานที่ปล่อยคาร์บอนต่ำกว่า
 - นำระบบแบตเตอรี่กักเก็บพลังงาน (BESS) มาประยุกต์ใช้เพื่อกักเก็บพลังงานไฟฟ้าส่วนเกิน ซึ่งจะช่วยลดความจำเป็นในการเปิดเครื่องเดินเครื่องโรงไฟฟ้าก๊าซธรรมชาติในช่วงที่ความต้องการใช้ไฟฟ้าพิก (Peak Load)
 - พัฒนาระบบโครงข่ายไฟฟ้าอัจฉริยะ (Smart Grid) เพื่อรองรับผู้ผลิตไฟฟ้ารายย่อย (Prosumers) ซึ่งจะช่วยเพิ่มความยืดหยุ่นและลดการผูกขาดในโครงสร้างระบบการผลิตไฟฟ้าในระยะยาว

เอกสารอ้างอิง

- [1] Kloppers, P. H., & Greeff, J. C. (2013). *Lotka–Volterra model parameter estimation using experiential data*. *Applied Mathematics and Computation*, 224, 817–825. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.093>
- [2] Chatterjee, S., & Hadi, A. S. (2006). *Regression Analysis by Example* (4th ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- [3] วิฑูรย์ พึ่งรัตนา. (2556). *เอกสารประกอบการสอนรายวิชา การวิเคราะห์เชิงตัวเลข*. นครปฐม: มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม.
- [4] PCP. (2020, September 10). *MAE, MSE, RMSE — เลือกใช้ยังไงดีมาลองดูที่ความหมาย*. Medium. <https://medium.com/@chalat.phum/mse-rmse-mae>
- [5] Freedman, H. I., & Waltman, P. (1984). *Equilibrium in a three-dimensional competitive Lotka–Volterra system*. *Mathematical Biosciences*, 68, 189–203. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(84\)90047-3](https://doi.org/10.1016/0025-5564(84)90047-3)
- [6] ราชกิจจานุเบกษา. (2561). *ยุทธศาสตร์ชาติ (พ.ศ. 2561–2580)*. เล่ม 135 ตอนที่ 82 ก, 1–71. <https://iecc.energy.go.th/PDF/ยุทธศาสตร์ชาติ-20ปี-2561-2580.pdf>

ภาคผนวก

การเขียนโปรแกรม Python ในโครงการ

วิธีการของ integral method

รูปที่ 1 การเขียนโปรแกรม Python สำหรับนำเข้าข้อมูลและเชื่อมต่อระบบจัดเก็บข้อมูล

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 # =====
7 # * ส่วนที่ 1: ข้อมูลจริง (Hybrid Data Source)
8 # 1. ช่วง Oct 2018 - Dec 2024: ข้อมูลจากไฟล์อาจารย์ (UV3_Fuel_integralmethod.m) เป็นฯ
9 # 2. ช่วง Jan 2025 - Nov 2025: ข้อมูลจากไฟล์ 2025.xlsx (หัวข้อ 1 ด้านพลังงานทั้งหมด)
10 # =====
11
12 x_real = np.array([
13     # --- Data from Teacher's File (2 decimals) ---
14     10112.57, 10332.75, 9222.76, 9268.11, 9287.21, 10952.87, 10900.06, 11788.13, 10707.57, 10164.99,
15     9293.48, 9352.44, 10614.26, 10660.78, 8850.72, 9831.99, 9402.86, 11020.39, 9448.76, 10076.97,
16     9624.49, 10765.26, 8872.89, 9068.17, 8657.62, 8959.8, 8129.95, 8311.97, 8679.57, 11178.96,
17     9959.44, 11240.2, 9720.7, 8695.67, 8512.24, 9244.85, 9808.03, 9592.28, 7668.94, 9355.23,
18     9340.15, 11309.68, 9931.83, 9802.43, 10109.21, 9321.18, 8884.58, 9340.17, 8740.23, 10024.15,
19     8477.97, 8084.16, 8987.37, 11056.52, 11863.01, 13234.88, 11834.39, 11895.35, 11213.66, 10031.42,
20     10633.49, 10569.07, 9998.68, 10801.56, 11020.98, 12990.41, 13252.44, 13563.09, 12301.86, 10711.37,
21     11766.21, 10001.28, 10443.26, 10498.05, 9112.36,
22     # --- Data from 2025.xlsx (1 decimal) ---
23     9140.7, 9756.0, 11530.9, 11877.5, 11604.0, 10362.9, 10214.6, 9900.3, 9427.9, 10120.2, 9276.9
24 ])
25
26 y_real = np.array([
27     # --- Data from Teacher's File (2 decimals) ---
28     2849.82, 2428.71, 2953.02, 2817.73, 2733.24, 3196.02, 3167.24, 3120.05, 3099.32, 3338.72,
29     3051.52, 2923.65, 3101.23, 2719.38, 2557.12, 3257.31, 2947.25, 3250.3, 3114.65, 3482.35,
30     3186.16, 2664.91, 3151.39, 2937.9, 3100.07, 2949.49, 2781.38, 2632.41, 2833.68, 2918.07,
31     3015.53, 2874.5, 3055.68, 3458.79, 3380.13, 2583.6, 3150.2, 3069.47, 3092.57, 2723.06,
32     2472.68, 2863.23, 2774.04, 3364.24, 2876.03, 3207.77, 3400.04, 2864.0, 3247.58, 3134.84,
33     2595.2, 2513.35, 2498.19, 2671.15, 2686.22, 2681.38, 2673.46, 2536.84, 2413.01, 2662.88,
34     2508.12, 2552.01, 2076.14, 2596.18, 2926.92, 3056.24, 2949.05, 3012.51, 2478.96, 2516.49,
35     2245.78, 2845.61, 3131.78, 2959.84, 2540.11,
36     # --- Data from 2025.xlsx (1 decimal) ---
37     2051.3, 2762.7, 3183.3, 2551.1, 3067.7, 3122.3, 3034.9, 3118.9, 3037.9, 2998.4, 2525.2
38 ])
39
40 z_real = np.array([
41     # --- Data from Teacher's File (2 decimals) ---
42     4610.84, 4142.55, 4285.13, 4267.94, 4078.04, 4722.22, 4366.32, 4410.51, 4419.58, 4420.82,
43     5261.89, 4734.44, 4445.85, 3623.46, 4507.97, 4276.01, 4282.16, 4630.43, 4359.67, 4442.53,
44     4147.8, 4108.98, 5342.83, 5096.37, 4696.44, 4472.29, 4763.86, 4547.95, 4038.59, 5035.81,
45     4614.79, 4991.63, 5339.42, 5705.66, 5942.06, 5235.02, 4779.7, 4423.78, 4968.5, 4780.61,
46     4274.58, 5523.59, 5477.75, 5770.56, 5909.92, 6308.8, 6211.1, 5449.8, 5207.26, 3986.37,
47     5046.31, 5258.54, 4630.38, 5400.85, 4918.32, 5117.9, 4909.21, 5139.9, 5797.97, 5730.97,
48     5560.95, 4615.85, 5479.73, 4901.51, 4675.28, 5350.49, 5631.73, 5214.05, 5296.95, 6163.48,
49     5746.4, 6097.86, 5946.31, 5075.7, 5503.94,
50     # --- Data from 2025.xlsx (1 decimal) ---
51     5309.9, 4605.9, 5921.5, 5476.5, 5742.9, 6060.2, 6508.8, 7076.1, 6606.0, 6318.9, 5538.1
52 ])
53
54 time_steps = np.arange(len(x_real))
```

รูปที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเชิงพลวัตด้วยวิธี Least Squares และการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

```
54 # =====
55 # * ส่วนที่ 2: Parameter Estimation (Least Squares)
56 # =====
57 def estimate_params(target, v1, v2):
58     N = len(target)
59     A_mat, B_vec = [], []
60     for k in range(N - 1):
61         xk, xk_next = target[k], target[k+1]
62         vk1, vk1_next = v1[k], v1[k+1]
63         vk2, vk2_next = v2[k], v2[k+1]
64         # Integral Method (Trapezoidal Rule)
65         term_a = (xk_next + xk) / 2.0
66         term_b = (xk_next**2 + xk**2) / 2.0
67         term_c = (xk_next*vk1_next + xk*vk1) / 2.0
68         term_d = (xk_next*vk2_next + xk*vk2) / 2.0
69         A_mat.append([term_a, term_b, term_c, term_d])
70         B_vec.append(xk_next - xk)
71     params, residuals, rank, s = np.linalg.lstsq(A_mat, B_vec, rcond=None)
72     return params
73
74 print("🔍 Estimating Parameters (Standard Least Squares)...")
75 pX = estimate_params(x_real, y_real, z_real)
76 pY = estimate_params(y_real, x_real, z_real)
77 pZ = estimate_params(z_real, x_real, y_real)
78 print("🔍 Params Gas(X): a={pX[0]:.6f}, b={pX[1]:.6f}, c={pX[2]:.6f}, d={pX[3]:.6f}")
79 print("🔍 Params Coal(Y): a={pY[0]:.6f}, b={pY[1]:.6f}, c={pY[2]:.6f}, d={pY[3]:.6f}")
80 print("🔍 Params Other(Z): a={pZ[0]:.6f}, b={pZ[1]:.6f}, c={pZ[2]:.6f}, d={pZ[3]:.6f}")
81 ...
```

รูปที่ 3 การจำลองการตอบสนองของระบบด้วยวิธี Runge-Kutta ลำดับที่ 4 (RK4 Simulation)

```

81 # =====
82 # * ส่วนที่ 3: RK4 Simulation
83 # =====
84 h = 0.1
85 total_months = len(x_real)
86 steps = int((total_months - 1) / h)
87 x_sim, y_sim, z_sim = [x_real[0]], [y_real[0]], [z_real[0]]
88 t_sim = 0
89 def model(v, v1, v2, p):
90     return v * (p[0] + p[1]*v + p[2]*v1 + p[3]*v2)
91 for i in range(steps):
92     x1 = x_sim, y1 = y_sim, z1 = z_sim, t1 = t_sim, p1 = p
93     k1x = model(x1, y1, z1, t1, p1)
94     k1y = model(y1, x1, z1, t1, p1)
95     k1z = model(z1, x1, y1, t1, p1)
96
97     k2x = model(x1 + 0.5*h*k1x, y1 + 0.5*h*k1y, z1 + 0.5*h*k1z, p1)
98     k2y = model(y1 + 0.5*h*k1y, x1 + 0.5*h*k1x, z1 + 0.5*h*k1z, p1)
99     k2z = model(z1 + 0.5*h*k1z, x1 + 0.5*h*k1x, y1 + 0.5*h*k1y, p1)
100
101     k3x = model(x1 + 0.5*h*k2x, y1 + 0.5*h*k2y, z1 + 0.5*h*k2z, p1)
102     k3y = model(y1 + 0.5*h*k2y, x1 + 0.5*h*k2x, z1 + 0.5*h*k2z, p1)
103     k3z = model(z1 + 0.5*h*k2z, x1 + 0.5*h*k2x, y1 + 0.5*h*k2y, p1)
104
105     k4x = model(x1 + h*k3x, y1 + h*k3y, z1 + h*k3z, p1)
106     k4y = model(y1 + h*k3y, x1 + h*k3x, z1 + h*k3z, p1)
107     k4z = model(z1 + h*k3z, x1 + h*k3x, y1 + h*k3y, p1)
108
109     x_sim.append(x1 + (h/6)*(k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x))
110     y_sim.append(y1 + (h/6)*(k1y + 2*k2y + 2*k3y + k4y))
111     z_sim.append(z1 + (h/6)*(k1z + 2*k2z + 2*k3z + k4z))
112     t_sim.append(t1 + h)
113 indices = [int(t/h) for t in range(total_months)]
114 x_pred = [x_sim[i] for i in indices]
115 y_pred = [y_sim[i] for i in indices]
116 z_pred = [z_sim[i] for i in indices]
117

```

รูปที่ 4 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนและแสดงผลตารางเปรียบเทียบ (Model Evaluation and Error Metrics)

```

118 # =====
119 # * ส่วนที่ 4: แสดงผลค่าความคลาดเคลื่อน (Table Output)
120 # =====
121 print("\n Model Predicted Values (Selected 86 Monthly Points):")
122 print(f"{'Month':<6} | {'Gas(Real)':<10} | {'Gas(Model)':<10} | {'Coal(Real)':<10} | {'Coal(Model)':<10} | {'Other(Real)':<10} | {'Other(Model)':<10}")
123 print("-" * 65)
124 for i in range(len(x_real)):
125     print(f"{i:<6} | {x_real[i]:<10.2f} | {x_pred[i]:<10.2f} | {y_real[i]:<10.2f} | {y_pred[i]:<10.2f} | {z_real[i]:<10.2f} | {z_pred[i]:<10.2f}")
126
127 # =====
128 # * ส่วนที่ 5: Error Metrics (MAPE, MAE, RMSE)
129 # =====
130 def calculate_errors(real, pred, name):
131     real, pred = np.array(real), np.array(pred)
132     mape = np.mean(np.abs((real - pred) / real)) * 100
133     mae = np.mean(np.abs(real - pred))
134     rmse = np.sqrt(np.mean((real - pred)**2))
135     print(f"Error (name): MAPE={mape:.2f}%, MAE={mae:.2f}, RMSE={rmse:.2f}")
136
137 print("\n-----")
138 calculate_errors(x_real, x_pred, "Gas (X)")
139 calculate_errors(y_real, y_pred, "Coal (Y)")
140 calculate_errors(z_real, z_pred, "Other (Z)")
141

```

รูปที่ 5 การแสดงผลกราฟฟิกและการวิเคราะห์เสถียรภาพ (Visualization and Stability Analysis)

```

142 # =====
143 # * ส่วนที่ 6: Plotting (รวม 3 แกนในกราฟเดียว + 3D)
144 # =====
145 # 6.1 2D Line Plot
146 plt.figure(figsize=(12, 7))
147 plt.plot(time_steps, x_real, 'ro', label='Gas (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
148 plt.plot(t_sim, x_sim, 'r-', linewidth=2, label='Gas (Model)')
149 plt.plot(time_steps, y_real, 'bo', label='Coal (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
150 plt.plot(t_sim, y_sim, 'b-', linewidth=2, label='Coal (Model)')
151 plt.plot(time_steps, z_real, 'bo', label='Other (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
152 plt.plot(t_sim, z_sim, 'b-', linewidth=2, label='Other (Model)')
153 plt.title("Comparison of Electricity Generation: Real Data vs RK4 Simulation")
154 plt.xlabel("Month (0 = Oct 2018)")
155 plt.ylabel("Electricity Generation (GWh)")
156 plt.legend()
157 plt.grid(True)
158 plt.show()
159
160 # 6.2 Stability & 3D Plot
161 A_eq = np.array([[pX[1], pX[2], pX[3]], [pY[2], pY[1], pY[3]], [pZ[2], pZ[3], pZ[1]]])
162 B_eq = np.array([-pX[0], -pY[0], -pZ[0]])
163 try:
164     E_star = np.linalg.solve(A_eq, B_eq)
165     xe, ye, ze = E_star
166
167     # Eigenvalues (Show i instead of j)
168     M = np.array([[pX[1], pX[2], pX[3]], [pY[2], pY[1], pY[3]], [pZ[2], pZ[3], pZ[1]]])
169     J = np.diag(xe, ye, ze) @ M
170     eigvals = np.linalg.eigvals(J)
171     print(f"\n - Stability Analysis:")
172     print(f"* Equilibrium Point: X={xe:.2f}, Y={ye:.2f}, Z={ze:.2f}")
173     print(f"* Eigenvalues (Formatted):")
174     for val in eigvals:
175         sign = "+" if val.imag >= 0 else "-"
176         print(f"    {sign} {val.real:.4f} (sign: {abs(val.imag):.4f})" # <--- i คุ้ม
177 except:
178     xe, ye, ze = 0,0,0
179 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
180 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
181 ax.plot(x_sim, y_sim, z_sim, color='purple', linewidth=2, label='RK4 Path (Model)')
182 ax.scatter(x_real, y_real, z_real, color='cyan', s=20, alpha=0.6, label='Real Data')
183 ax.scatter(xe, ye, ze, color='red', s=200, marker='*', label='Equilibrium')
184 ax.set_xlabel('Gas (X)')
185 ax.set_ylabel('Coal (Y)')
186 ax.set_zlabel('Other (Z)')
187 ax.set_title("3D Phase Space Eq: ((xe,0f), (ye,0f), (ze,0f)))")
188 ax.legend()
189 plt.show()
190

```

วิธีการของ Log integral method

รูปที่ 1 การเขียนโปรแกรม Python สำหรับนำเข้าข้อมูลและเชื่อมต่อระบบจัดเก็บข้อมูล

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
5
6 # =====
7 # * ส่วนที่ 1: รับข้อมูล (สัปดาห์ 2018 - พฤษภาคม 2025)
8 # =====
9 x_real = np.array([
10     10112.6, 10332.7, 9222.8, 9268.1, 9287.2, 10952.9, 10900.1, 11788.1, 10707.6, 10165.0, 9293.5, 9352.4, 10614.3, 10660.8,
11     8850.7, 9832.0, 9402.9, 11020.4, 9448.8, 10077.0, 9624.5, 10765.3, 8872.9, 9668.2, 8657.6, 8959.8, 8130.0, 8312.0,
12     8679.6, 11379.0, 9959.4, 11240.2, 9720.7, 8695.7, 8512.2, 9244.8, 9888.0, 9592.3, 7988.9, 9355.2, 9340.1, 11309.7,
13     9931.8, 9802.4, 10109.2, 9321.2, 8884.6, 9340.2, 8740.2, 10024.2, 8478.0, 8084.2, 8987.4, 11056.5, 11863.0, 13234.9,
14     11834.4, 11895.4, 11213.7, 10031.4, 10633.5, 10569.1, 9998.7, 10801.6, 11021.0, 12990.4, 13252.4, 13563.1, 12301.9,
15     10711.4, 11766.2, 10001.3, 10443.3, 10408.0, 9112.4, 9140.7, 9756.0, 11530.9, 11877.5, 11604.0, 10362.9, 10214.6,
16     9900.3, 9427.9, 10120.2, 9276.9
17 ])
18
19 y_real = np.array([
20     2849.8, 2428.7, 2953.0, 2817.7, 2733.2, 3196.0, 3167.2, 3120.0, 3099.3, 3338.7, 3051.5, 2923.6, 3101.2, 2719.4,
21     2557.1, 3257.3, 2947.2, 3250.3, 3114.7, 3482.3, 3186.2, 2664.9, 3151.4, 2937.9, 3100.1, 2949.5, 2781.4, 2632.4,
22     2833.7, 2918.1, 3015.5, 2874.5, 3055.7, 3458.8, 3380.1, 2583.6, 3150.2, 3069.5, 3092.6, 2723.1, 2472.7, 2863.2,
23     2774.0, 3364.2, 2876.0, 3207.8, 3400.0, 2864.0, 3247.6, 3134.8, 2595.2, 2513.4, 2458.2, 2671.2, 2686.2, 2681.4,
24     2673.5, 2536.8, 2413.0, 2662.9, 2508.1, 2552.0, 2076.1, 2396.2, 2926.9, 3056.2, 2949.1, 3012.5, 2479.0, 2516.5,
25     2245.8, 2845.6, 3131.8, 2959.8, 2540.1, 2051.3, 2762.7, 3183.3, 2551.1, 3067.7, 3122.3, 3034.9, 3118.9, 3037.9,
26     2998.4, 2525.2
27 ])
28
29 z_real = np.array([
30     4610.9, 4142.6, 4286.2, 4268.0, 4078.1, 4722.2, 4366.3, 4410.4, 4419.5, 4420.8, 5261.9, 4734.5, 4445.9, 3623.5,
31     4508.0, 4276.0, 4282.1, 4630.4, 4359.7, 4442.5, 4147.8, 4108.9, 5342.8, 5096.4, 4696.4, 4472.3, 4763.8, 4547.9,
32     4038.6, 5035.7, 4614.8, 4991.7, 5539.4, 5705.7, 5942.0, 5235.1, 4779.7, 4423.8, 4968.5, 4780.6, 4274.6, 5523.6,
33     5477.8, 5770.6, 5909.9, 6308.9, 6211.1, 5449.9, 5207.3, 3986.3, 5946.4, 5258.6, 4630.4, 5400.9, 4918.3, 5117.9,
34     4909.2, 5139.8, 5798.0, 5731.0, 5560.9, 4615.9, 5479.6, 4901.6, 4675.3, 5350.6, 5631.7, 5214.0, 5296.9, 6163.6,
35     5746.4, 6097.8, 5946.3, 5075.7, 5503.9, 5309.8, 4605.8, 5921.5, 5476.5, 5742.8, 6060.1, 6508.9, 7076.1, 6606.0,
36     6318.9, 5538.1
37 ])
38
39 time_steps = np.arange(len(x_real))
40
41 ..
```

รูปที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี Logarithmic Integral Least Squares

```
41 # =====
42 # * ส่วนที่ 2: Parameter Estimation (Logarithmic Integral Method)
43 # =====
44 def estimate_params_log(target, v1, v2):
45     """
46     ใช้วิธี Log-Integral: ln(V_next/V) = integral(a + bV + cV1 + dV2) dt
47     """
48     N = len(target)
49     A_mat, B_vec = [], []
50     for k in range(N - 1):
51         vk, vk_next = target[k], target[k+1]
52         v1k, v1k_next = v1[k], v1[k+1]
53         v2k, v2k_next = v2[k], v2[k+1]
54
55         # Left side: ln(V(k+1)) - ln(V(k))
56         delta_ln_v = np.log(vk_next) - np.log(vk)
57
58         # Right side: Trapezoidal integration of (a + bV + cV1 + dV2)
59         term_a = 1.0
60         term_b = (vk_next + vk) / 2.0
61         term_c = (v1k_next + v1k) / 2.0
62         term_d = (v2k_next + v2k) / 2.0
63
64         A_mat.append([term_a, term_b, term_c, term_d])
65         B_vec.append(delta_ln_v)
66
67     params, _ = np.linalg.lstsq(A_mat, B_vec, rcond=None)
68     return params
69
70 print("© Estimating Parameters (Logarithmic Integral Least Squares)...")
71 pX = estimate_params_log(x_real, y_real, z_real)
72 pY = estimate_params_log(y_real, x_real, z_real)
73 pZ = estimate_params_log(z_real, x_real, y_real)
74
75 print(f"★ Params Gas(X): a={pX[0]:.6f}, b={pX[1]:.6f}, c={pX[2]:.6f}, d={pX[3]:.6f}")
76 print(f"★ Params Coal(X): a={pY[0]:.6f}, b={pY[1]:.6f}, c={pY[2]:.6f}, d={pY[3]:.6f}")
77 print(f"★ Params Other(Z): a={pZ[0]:.6f}, b={pZ[1]:.6f}, c={pZ[2]:.6f}, d={pZ[3]:.6f}")
78
79 ..
```

รูปที่ 3 การจำลองการตอบสนองของระบบด้วยวิธี Runge-Kutta ลำดับที่ 4 (RK4 Simulation)

```
78
79 # =====
80 # * ส่วนที่ 3: RK4 Simulation (Tasaeada V = V(a + bV + cV1 + dV2))
81 # =====
82 h = 0.1
83 total_months = len(x_real)
84 steps = int((total_months - 1) / h)
85
86 x_sim, y_sim, z_sim = [x_real[0]], [y_real[0]], [z_real[0]]
87 t_sim = [0]
88
89 def model(v, v1, v2, p):
90     return v * (p[0] + p[1]*v + p[2]*v1 + p[3]*v2)
91
92 for i in range(steps):
93     xn, yn, zn = x_sim[-1], y_sim[-1], z_sim[-1]
94
95     k1x = model(xn, yn, zn, pX)
96     k1y = model(yn, xn, zn, pY)
97     k1z = model(zn, xn, yn, pZ)
98
99     k2x = model(xn + 0.5*h*k1x, yn + 0.5*h*k1y, zn + 0.5*h*k1z, pX)
100    k2y = model(yn + 0.5*h*k1y, xn + 0.5*h*k1x, zn + 0.5*h*k1z, pY)
101    k2z = model(zn + 0.5*h*k1z, xn + 0.5*h*k1x, yn + 0.5*h*k1y, pZ)
102
103    k3x = model(xn + 0.5*h*k2x, yn + 0.5*h*k2y, zn + 0.5*h*k2z, pX)
104    k3y = model(yn + 0.5*h*k2y, xn + 0.5*h*k2x, zn + 0.5*h*k2z, pY)
105    k3z = model(zn + 0.5*h*k2z, xn + 0.5*h*k2x, yn + 0.5*h*k2y, pZ)
106
107    k4x = model(xn + h*k3x, yn + h*k3y, zn + h*k3z, pX)
108    k4y = model(yn + h*k3y, xn + h*k3x, zn + h*k3z, pY)
109    k4z = model(zn + h*k3z, xn + h*k3x, yn + h*k3y, pZ)
110
111    x_sim.append(xn + (h/6)*(k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x))
112    y_sim.append(yn + (h/6)*(k1y + 2*k2y + 2*k3y + k4y))
113    z_sim.append(zn + (h/6)*(k1z + 2*k2z + 2*k3z + k4z))
114    t_sim.append(t_sim[-1] + h)
115
116 indices = [int(t/h) for t in range(total_months)]
117 x_pred = [x_sim[i] for i in indices]
118 y_pred = [y_sim[i] for i in indices]
119 z_pred = [z_sim[i] for i in indices]
120
```

รูปที่ 4 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนและแสดงผลตารางเปรียบเทียบ (Model Evaluation and Error Metrics)

```

121 # =====
122 # * ส่วนที่ 4: แสดงค่าในตาราง (Table Output)
123 # =====
124 print("\n# Model Predicted Values (Log-Integral Method):")
125 print(f"({Month}<6) | ('Gas(Real)<10) | ('Gas(Mod)<10) | ('Coal(Real)<10) | ('Coal(Mod)<10) | ('Other(Real)<10) | ('Other(Mod)<10)")
126 print("\n" * 85)
127 for i in range(len(x_real)):
128     print(f"({i}<6) | (x_real[i]<10.2f) (x_pred[i]<10.2f) | (y_real[i]<10.2f) (y_pred[i]<10.2f) | (z_real[i]<10.2f) (z_pred[i]<10.2f)")
129
130 # =====
131 # * ส่วนที่ 5: Error Metrics
132 # =====
133 def calculate_error(real, pred, name):
134     real, pred = np.array(real), np.array(pred)
135     mape = np.mean(np.abs((real - pred) / real)) * 100
136     mae = np.mean(np.abs(real - pred))
137     rmse = np.sqrt(np.mean((real - pred)**2))
138     print(f"|| Error (name): MAPE=(mape:.2f)%, MAE=(mae:.2f), RMSE=(rmse:.2f)")
139
140 print("\n-----")
141 calculate_errors(x_real, x_pred, "Gas (X)")
142 calculate_errors(y_real, y_pred, "Coal (Y)")
143 calculate_errors(z_real, z_pred, "Other (Z)")
144

```

รูปที่ 5 การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนและแสดงผลตารางเปรียบเทียบ (Model Evaluation and Error Metrics)

```

145 # =====
146 # * ส่วนที่ 6: Plotting
147 # =====
148 plt.figure(figsize=(12, 7))
149 plt.plot(time_steps, x_real, 'o', label='Gas (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
150 plt.plot(x_sim, x_sim, 'v', linewidth=2, label='Gas (Log-Model)')
151 plt.plot(time_steps, y_real, 'o', label='Coal (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
152 plt.plot(x_sim, y_sim, 'v', linewidth=2, label='Coal (Log-Model)')
153 plt.plot(time_steps, z_real, 'o', label='Other (Real)', markersize=4, alpha=0.6)
154 plt.plot(x_sim, z_sim, 'v', linewidth=2, label='Other (Log-Model)')
155 plt.title("Log-Integral Parameter Estimation: Real Data vs RK4 Simulation")
156 plt.xlabel("Month (0 = Oct 2018)")
157 plt.ylabel("GWh")
158 plt.legend()
159 plt.grid(True)
160 plt.show()
161 # 6.2 Stability & 3D Plot
162 A_eq = np.array([[pX[1], pX[2], pX[3]], [pY[2], pY[1], pY[3]], [pZ[2], pZ[3], pZ[1]]])
163 B_eq = np.array([-pX[0], -pY[0], -pZ[0]])
164 try:
165     E_star = np.linalg.solve(A_eq, B_eq)
166     xe, ye, ze = E_star
167     M = np.array([[pX[1], pX[2], pX[3]], [pY[2], pY[1], pY[3]], [pZ[2], pZ[3], pZ[1]]])
168     J = np.diag([xe, ye, ze]) @ M
169     eigvals = np.linalg.eigvals(J)
170
171     print("\n◌ Stability Analysis (Log-Method):")
172     print(f"* Equilibrium Point: X=(xe:.2f), Y=(ye:.2f), Z=(ze:.2f)")
173     print(f"* Eigenvalues:")
174     for val in eigvals:
175         sign = "-" if val.imag >= 0 else "+"
176         print(f"({val.real:.4f}) (sign) (abs(val.imag):.4f)°")
177 except:
178     xe, ye, ze = 0,0,0
179
180 fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
181 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
182 ax.plot(x_sim, y_sim, z_sim, color='purple', linewidth=2, label='RK4 Path (Log-Model)')
183 ax.scatter(x_real, y_real, z_real, color='cyan', s=20, alpha=0.6, label='Real Data')
184 ax.scatter(xe, ye, ze, color='red', s=200, marker='*', label='Equilibrium')
185 ax.set_xlabel("Gas (X)")
186 ax.set_ylabel("Coal (Y)")
187 ax.set_zlabel("Other (Z)")
188 ax.set_title("3D Phase Space (Log-Integral Method) nEq: {(xe:.0f), (ye:.0f), (ze:.0f)}")
189 ax.legend()
190 plt.show()
191

```